(ecricome 2007 option éco)

« Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations. »

Exercice 1

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite (u_n) de nombres réels définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par Ia relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1. Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquernent cette limite.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbf{R}^{+*}$ et dresser le tableau de variation de f_a.

4. En déduire que :

$$\forall\, t > 0, f_a(t) \geq a$$

1.2. Etude de la convergence de la suite (u_n).

1. Que dire de la suite (u_n) dans le cas particulier où $u_0 = a$?

2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.

Dérnontrer que :

$$\forall\, t > a,\ 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier n, non nul : $u_n \geq a$

4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que

$$|u_n - a\,| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$, la fonction g définie par :

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d 'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$..

2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$ dont on précisera la nature.

3. Vérifier que :

$$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$.

exercice 2

$M_2(R)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
La matrice A suivante étant donnée
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
on définit l'application $\phi_A$par :
ϕ_A: $\mathbf{M_2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{M_2}(\mathbf{R})$, $M \mapsto \phi_A(M) = AM - MA$
2.1. Diagonalisation de A.
1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de **$M_2(R)$** et une matrice diagonale D de **$M_2(R)$** dont la première colonne est nulle vérifiant la relation : $A = PDP^{-1}$. Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.
2.2. Diagonalisation de ϕ_A.
1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de **$M_2(R)$**.
2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A. En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A .
3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle : $DN - ND = \lambda N$.
4 . On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
a. Trouver I'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.
b. En déduire que la famille (A, M_1), avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $\ker(\phi_A)$ associé à la valeur propre 0.
c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.
d. En déduire une base de chaque sous-espace propre E_{λ_1} et E_{λ_2} associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2.
5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

exercice 3

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :
3.1. Mode de paiement de la clientèle.
1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :
P [S = 0 ∩ U = 0] = 0,4
P [S = 0 ∩ U = 1] = 0,3
P [S = 1 ∩ U = 0] = 0,2
P [S = 1 ∩ U = 1] = 0,1
où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.
a. Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \frac{3}{5}$.
b. Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
c. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les indiviclus.
Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$) .
On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.

T_1 (resp. T_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

a. Reconnaître la loi de C_n ,rappeler la valeur de I'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

b. Déterminer la loi de T_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(L_1 = k) = 1$$

c. Déterniner la loi de T_2.

3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$f(x) = x\, e^{-x}$ si $x \geq 0$; $f(x) = 0$ si $x < 0$

1. Rappeler Ia définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner Ia valeur de I'espérance et de la variance de X.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que I'on déterminera. Quel est le ternps moyen de passage en caisse ?

3. a. Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

$\forall\, x < 0\,, F_T(x) = 0$; $\forall x \geq 0\,, F_T(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à

$$\frac{2\mathrm{e} - 3}{2\mathrm{e}}$$

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

a. M désignant le temps d'attente du client C, exprimer M en fonction de T_A et T_B

b. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

$\forall\, t \geq 0\,, P(M \leq t) = 1 - (1+t)^2 e^{-2t}$; $\forall\, t < 0\,, P(M \leq t) = 0$

c. Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.