exercice 1
pour toute matrice M élément de $\mathbf{M_2(R)}$, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M, définie de la façon suivante : si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{B} = (E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4)$ est une base de $\mathbf{M_2(R)}$.
Or note φ l'application qui à toute matrice$M$ de $\mathbf{M_2(R)}$ associée $\varphi(M) = M + {}^tM$.
1) a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{M_2(R)}$.
b) Écrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.
c) En déduire que φ est diagonalisable et non bijectif.
2) Calculer A^2 et en déduire que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $A^n = 2^{n-1}A$.
3) a) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$, puis établir que $\dim \mathrm{Im}\,\varphi$ = 3.
b) En déduire la dimension de $\ker\varphi$ puis déterminer une base de $\ker\varphi$.
c) Établir que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 2.
d) Donner, pour résumer, les valeurs propres de φ ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Exercice 2
On admet que, si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :
$\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}(Z_1 Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2)$
On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ indépendantes, X suivant a loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur {-1, 1}.
On pose $Y = UX$et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
1) a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

b) En déduire que Ysuit la même loi que X.
2) a) Calculer l'espérance de U puis rnontrer que .
b) En déduire que
3) a) Rappeler la valeur de
b) Montrer grâce à une intégration par parties, que:

d) Etablir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que = 3.
4) a) Vérifier que 3.
b) Déterminer .
c) En déduire que X^2 ' et Y^2ne sont pas indépendantes. M.ontrer alors que et ne le sont
pas non plus.
d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concemant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densiité. Lequel ?

Exercice 3
1) a) Montrer que : $\forall x > 0,\ x - \ln x > 0$.
b) On pose alors :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 & \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.
2) a) Montrer que f est continue sur D.
b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3) a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D \setminus \{0\}$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. .
c) Dresser le tableau de variations de f.
4) Etudier le signe de $f(x)$.
5) Pour tout réel x élémentd de D, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est de classe C^1 sur D, puis étudier ses variations.
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$
c)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t}\mathrm{d}t$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

Problème
On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir « pile » et celle d'obtenir « face » étant donc toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$), et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où on obtient le premier « pile ».
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbf{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1,2,\ldots,k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.
1) On décide de coder l'événement « obtenir un " pile" » par 1 et l'événement « obtenir un "face" » par 0.
On rappelle que la fonction `random` renvoie, pour un argument k de type integer (où k désigne un entier supérieur ou égal à l) un entier aléatoire compris entre 0 et $k - 1$l.
a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.
```
Program edhec_2007;
Var z,hasard:integer;
Begin
Randomize;z:=0;
Repeat z:= ...... ; hasard:=  ..... ;until(hasard = l);
Writeln(z);
End.
```
b) Quelle instruction faut-il rajouter avant la demière ligne de ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?
2) Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbf{N}^*$).
3) Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
4) a) Pour tout couple (i,k) de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$**,** déterminer la probabilité $\mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i)$.
b) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On admet, dans cette question, que
$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}$
Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = 1$$

5) a) Montrer que, pour tout e ntier naturel non nul, on a :
b) En déduire que possède une espérance.
c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles comme dans la question4 c), que:
6) a) Utiliser le résultat de la question 5 a) pour montrer que X a un moment d'ordre2 .
b) Etablir alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles comme dans la question 4c), que :
c) Déterminer les réels tels que:
d) En déduire la valeur de et vérifier que l
7) a) Ecrire l'inégalité de Bienaymé Chebychv pour la variable'
b) En déduire que P
8) On se propose dans cette question de calculer
a) Ecrire explicitement en fonction de. désignant un entier naturel non ul et un réel différent de .
b) Endéduire que
c) Montrer qu
En déduire la valeur de
d) Établir alors que P (X = 1) = ln 2 puis donner la valeur de .
e) Utiliser les résultats précédents pour calculer (X > 3), puis donner une valeur approchée de P(L > 3) en prenant .Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question?