ESC Maths 2007 E **EXERCICE 1**

On considère les matrices : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et on rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$.

Soit l'application f qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la matrice $f(M) = \dfrac{a+d}{2} I + \dfrac{b+c}{2} J$.

1. (a) Vérifier que $f\left(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Calculer $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ en fonction de E_1, E_2, E_3, E_4 .

   En déduire que la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = Vect(E_1 - E_4 , E_2 - E_3)$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = Vect(I, J)$.

3. (a) Calculer $A^2 - A$.

   (b) En déduire que les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 1 .

   Le réel 0 est-il valeur propre de f ?

   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Justifier que si $f(M) = M$ alors $M \in \mathrm{Im}(f)$.

   Réciproquement montrer que si $M \in Vect(I, J)$ alors $f(M) = M$.

   En déduire que le réel 1 est valeur propre de f , de sous-espace propre associé $Vect(I, J)$.

4. On considère la famille $\mathcal{C} = (E_1 - E_4 , E_2 - E_3 , I , J)$.

   (a) Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer la matrice D de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{C}$.

   (c) On considère $M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ et on rappelle que $f\left(\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

   Déterminer les coordonnées a', b', c', d' de M dans la base $\mathcal{C}$.

EXERCICE 2

On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx - e^{-x}$.

1. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f_n'.

   (b) Etudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$ (On précisera les limites aux bornes) et montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution notée u_n.

   (c) Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\frac{1}{n})$ puis justifier que $0 < u_n < \frac{1}{n}$.

   (d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Justifier l'égalité $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$, puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

On considère maintenant et dans toute la suite deux fonctions notées g et h :

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g((x, y)) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2e^{-x} + 2x^2$.

2. (a) Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.

   (c) Montrer que le seul point critique de g est le point $M = (u_2, u_2)$, où le réel u_2 est l' unique solution de l'équation $2x - e^{-x} = 0$, vue au 1. (b).

   (d) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.
   Montrer que g présente en M un minimum local de valeur $2u_2(2 + u_2)$.

3. (a) Montrer que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $g((x, y)) \geq h(x)$.

   (b) Etudier les variations de h et montrer que h présente en $x = u_2$ un minimum global.

   (c) En déduire que le minimum local présenté en M est aussi un minimum global pour g.

4. On considère le programme PASCAL suivant :

```
program racine ;
var     a , b : real ; k : integer ;
function  f ( x : real ) : real ;
   begin
     f :=  .......................................... ;
   end ;
begin
   a := 0 ;  b := 1 ;
   for  k := 1  to  10  do  if  (  ..............................  )  then  b := ( a + b ) / 2  else  a := ( a + b ) / 2 ;
   writeln ( '  u =  ' ,  a  ) ;
end .
```

   (a) Recopier et compléter la fonction **f** de manière à ce qu'elle calcule $f_2(x)$.

   (b) Recopier et compléter la boucle de manière à ce qu'elle effectue une recherche dichotomique de u_2. Justifier que la valeur de **a** affichée est une valeur approchée de u_2 avec une erreur inférieure à 0,001 (on donne $2^{10} = 1024$).

EXERCICE 3

Les parties A et B sont indépendantes .

On considère un moteur qui fonctionne sans interruption , en émettant du gaz carbonique dans l'atmosphère .

PARTIE A

Dans cette partie on suppose que le moteur subit chaque jour un contrôle de pollution afin de voir si le taux de gaz carbonique émis est réglementaire (Si c'est bien le cas on dira que le contrôle est positif) .
On numérote ces contrôles à partir du jour numéro 1 et on les suppose indépendants .

A chacun de ces contrôles la probabilité d'être positif est $\frac{3}{5}$.

Au premier contrôle négatif , les réglages du moteur sont améliorés puis on le soumet dès le lendemain à une nouvelle série de contrôles indépendants , à raison de un contrôle par jour .

A chacun de ces nouveaux contrôles la probabilité d'être positif est alors de $\frac{4}{5}$.

On note dans toute la suite X la variable aléatoire égale au numéro du jour du premier contrôle négatif et Y la variable aléatoire égale au numéro du jour du second contrôle négatif .

1. Justifier que X suit une loi classique , qu'on détaillera , et donner son espérance et sa variance.

2. (a) Donner $Y(\Omega)$. Que s'est-il passé les cinq premiers jours si $(X = 3)$ et $(Y = 5)$ se sont réalisés ?
En déduire que $P(\,(X = 3) \cap (Y = 5)\,) = \frac{72}{5^5}$.

   (b) Plus généralement , montrer que pour $i \geq 1$ et $j \geq 2$:

   - si $i < j$, $P(\,(X = i) \cap (Y = j)\,) = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{5}$.
   - si $i \geq j$, $P(\,(X = i) \cap (Y = j)\,) = 0$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel $j \geq 2$, $P(Y = j) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{j} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{j}$.

PARTIE B

Dans cette partie a désigne un réel strictement positif .

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < a \\ f(x) = \dfrac{3a^3}{x^4} & \text{si } x \geq a \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité .

Dans la suite de cette partie B , un capteur mesure <u>en permanence</u> le taux de gaz carbonique émis par le moteur.
On suppose que le temps écoulé entre le démarrage du moteur et l'instant précis (en heures) où son taux de gaz carbonique devient non règlementaire est une variable aléatoire T de densité f.

2. Montrer que T admet une espérance et une variance de valeurs : $E(T) = \frac{3a}{2}$, $V(T) = \frac{3a^2}{4}$.

3. (a) Déterminer la fonction de répartition de T .

   (b) Calculer les probabilités $P(T > 2a)$, $P_{T>2a}(T > 6a)$.

4. On met en route n moteurs de modèle identique au précédent, et indépendants ($n \in \mathbb{N}^*$) .

   On note $T_1, T_2, \dots, T_n$ les temps respectifs pendant lesquels ces moteurs ont un taux de gaz carbonique règlementaire ($T_1, T_2, \dots, T_n$ suivent donc la même loi que T et sont indépendantes).

   (a) Montrer que la variable $Z_n = \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ est un estimateur sans biais du réel a .

   (b) Calculer son risque quadratique noté $r(Z_n)$.