EML 2006
voie Eco

Exercice 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale :0 et 1.

   b) Comme on a deux valeurs propres distinctes, il suffit d'avoir deux vecteurs propres pour avoir une base :

   $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $(1,0)$ est vecteur propre associé à 0.

   $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(1,1)$ est vecteur propre associé à $(1,1)$

   Donc $((1,0),(1,1))$ est une base de vecteurs propres

   et avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $A = P\,D\,P^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A\,M = M\,D$

2. a) E est inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   $0 \in E$ car $A0 = 0 = 0D$

   Soient M et N de E et α et β réels alors

   $A(\alpha M + \beta N) = \alpha AN + \beta AM = \alpha ND + \beta MD = (\alpha M + \beta N)D$

   Donc $(\alpha M + \beta N) \in E$

   Conclusion : $\boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   On a $AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}$ et $MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$

   Donc M appartient à E si et seulement si $\begin{cases} z = 0 & y = t \\ z = 0 & t = t \end{cases}$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } M \text{ appartient à } E \text{ si et seulement si } z = 0 \text{ et } y = t}$

   c) on paramètre alors les solutions :

   $E = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / z = 0 \text{ et } y = t\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} / x, t \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

   Donc $E = \text{Vect}(U, A)$

   qui est donc génératrice de E et qui est libre donc

   Conclusion : $\boxed{(U, A) \text{ est une base de } E.}$

   d) On a $U\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne vérifie pas la seconde équation "$y = t$" car $0 \neq 1$

   Conclusion : $\boxed{U\,A \text{ n'est pas élément de } E}$

3. On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie , pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = A\,M - M\,D$.

   a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Soient M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β réels alors

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)\,D \\ &= \alpha AN + \beta AM - \alpha ND + \beta MD \\ &= \alpha\,(A\,M - M\,D) + \beta\,(A\,N - N\,D) \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

   b) $M \in \ker(f) \iff AM - MD = 0 \iff M \in E$
   Conclusion : $\boxed{\ker f = E \text{ et } \dim(\ker f) = 2}$ puisque (U, A) en est une base.

   c) D'après le théorème du rang on a alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$
   Conclusion : $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2}$

   d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix}$
   et $f(M) = M \iff \begin{cases} z = x & y = t - y \\ z = z & t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x & y = 0 \\ 0 = 0 & t = 0 \end{cases}$
   Donc l'ensemble de ces matrice est $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$
   Comme $E_1 \neq \{0\}$ alors 1 est valeur propre de f.
   De même et $f(M) = -M \iff \begin{cases} z = -x & y = -t + y \\ z = -z & t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 & 0 = 0 \\ z = 0 & t = 0 \end{cases}$
   Donc l'ensemble de ces matrices est $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} \neq \{0\}$
   Donc -1 est valeur propre de f.

   e) Les sous espaces propres de f sont de dimension
   - 2 pour la valeur propre 0
   - 1 pour la valeur propre 1 (famille génératrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est donc une base)
   - 1 pour la valeur propre -1 (base$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

   Comme $2 + 1 + 1 = 4$ alors
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

   f) Dans une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$ la matrice de f sera $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   et celle de f^3 sera donc $\begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$
   Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^3) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$
   Conclusion : $\boxed{f \circ f \circ f = f}$

Exercice 2

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$$

1. a) F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= (y-2)(x+y-6) + (x-1)(y-2) \\
&= (y-2)(2x+y-7) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= (x-1)(x+y-6) + (x-1)(y-2) \\
&= (x-1)(x+2y-8)
\end{aligned}$$

(x, y) est un point critique si et seulement si ces deux dérivées premières s'annulent
N.B. On ne demande pas **les** point critique, mais juste de vérifier que les points donnés en sont.

- en $(4, 2)$ on a :$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$
- en $(2, 3)$ on a : $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$

Conclusion : $\boxed{(4, 2) \text{ et } (2, 3) \text{ sont des points critiques de } F.}$

b) Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ on vérifie les conditions d'extremum local :
F est de classe C^2 et

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 2(y-2) \\
s &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = (2x+y-7) + (y-2) \\
&= 2x + 2y - 9 \\
t &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 2(x-1)
\end{aligned}$$

Donc en $(4, 2)$: $r = 0,\ s = 3,\ t = 6$ et $rt - s^2 = -9 < 0$
Conclusion : $\boxed{F \text{ n'a pas d'extremum local au point } (4, 2)}$

c) Et de même en $(2, 3)$:
$r = 2,\ s = 1?\ t = 2$ donc $rt - s^2 = 4 - 1 > 0$
Conclusion : $\boxed{F \text{ a un extremum local au point } (4, 2)}$ et comme $r > 0$, c'est un minimum local.

2. On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x-2)(2x-5)$$

a) $\forall x \in [4; +\infty[$, on a $x \geq 4$ donc $x - 2 \geq 2$ et $2x \geq 8$ et $2x - 5 \geq 3$
Donc (produit d'inégalités à termes positifs) $(x-2)(2x-5) \geq 6 \geq 4$

b) Donc si $x \geq 4$, en multipliant l'inégalité précédente par $x \geq 0$: $x(x-2)(2x-5) \geq 6 \geq 4x$ et comme $4x \geq 16 \geq 4$,
Conclusion : $\boxed{\forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) \geq 4x \text{ et } \varphi(x) \in [4, +\infty.[}$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(1+u_n, u_n)$$

a) On a $F(1+x, x) = \varphi(x)$ pour tout x réel.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \varphi(u_n)}$

b) On procède alors par récurrence :

- $u_0 = 4 \geq 4^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 4^{n+1}$ alors
comme $u_n \geq 4$ on a $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq 4u_n \geq 4 \cdot 4^{n+1} = 4^{n+2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 4^{n+1}}$

On a donc $0 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}$ et comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^{n+1}}$ est convergente (car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$) par majoration de termes positifs,

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{u_n} \text{ converge également.}}$

c) Pour cela, on calcule u_n et n jusqu'à ce que $u_n \geq 10^{10}$ (qui s'écrit `1E10` en PASCAL)

```
program suite;
var u:real;n:integer;
begin
    u:=4;n:=0;
    repeat
        u:=u*(u-2)*(2*u-3);
        n:=n+1;
    until u>=1E10
    writeln(n);
end.
```

4. On note $g : [4, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in [4; +\infty[$, par :

$$g(x) = \frac{10}{\varphi(x)}$$

a) g est continue sur $[4, +\infty[$ (car $x(x-2)(2x-5) \neq 0$)

donc $\displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,dx$ est impropre en $+\infty$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{10}{x(x-2)(2x-5)} = \frac{10}{2x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{5}{2x}\right)} \\ &\sim \frac{5}{x^3} \text{ quand } x \to +\infty \end{aligned}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ converge puisque $3 > 1$ et par comparaison de fonctions positives,

Conclusion : $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_4^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge.}}$

b) On réécrit les deux expressions sous la même forme factorisée :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{2x-5} &= \frac{a\left(x-2\right)\left(2x-5\right)+bx\left(2x-5\right)+cx\left(x-2\right)}{x\left(x-2\right)\left(2x-5\right)}\\
&= \frac{10a+\left(-9a-5b-2c\right)x+\left(2a+2b+c\right)x^2}{x\left(x-2\right)\left(2x-5\right)}\\
g\left(x\right) &= \frac{10+0x+0x^2}{x\left(x-2\right)\left(2x-5\right)}
\end{aligned}$$

Et on détermine a, b et c tels que : (c'est une condition suffisante)

$$\left\{\begin{array}{c} 10a=10 \\ -9a-5b-2c=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ 5b+2c=-9 \quad L_2-2L_3 \\ 2b+c=-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=-5 \\ c=8 \end{array}\right.$$

Conclusion : $\boxed{a=1 : b=-5 : c=8 \text{ conviennent.}}$

c) On a alors

$$\begin{aligned}
\int_4^M g\left(x\right)\,dx &= \int_4^M \frac{1}{x}+\frac{-5}{x-2}+\frac{8}{2x-5}\,dx\\
&= \left[\ln\left(x\right)+-5\ln\left(x-2\right)+4\ln\left(2x-5\right)\right]_4^M\\
&= \ln\left(M\right)-5\ln\left(M-2\right)+4\ln\left(2M-5\right)\\
&\quad -\ln\left(4\right)+5\ln\left(2\right)-4\ln\left(3\right)
\end{aligned}$$

dont il reste à déterminer la limte quand $M\to+\infty$:

$$\begin{aligned}
& \ln\left(M\right)-5\ln\left(M-2\right)+4\ln\left(2M-5\right)\\
= \ & \ln\left(M\right)-5\ln\left[M\left(1-\frac{2}{M}\right)\right]+4\ln\left[2M\left(1-\frac{5}{2M}\right)\right]\\
= \ & \left(1-5+4\right)\ln\left(M\right)+4\ln\left(2\right)+-5\ln\left(1-\frac{2}{M}\right)+4\ln\left(1-\frac{5}{2M}\right)\\
\to \ & 4\ln\left(2\right)=4\ln\left(2\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_4^M g\left(x\right)\,dx\to 7\ln\left(2\right)-4\ln\left(3\right)$$

Conclusion : $\boxed{\int_4^{+\infty} g\left(x\right)\,dx=7\ln\left(2\right)-4\ln\left(3\right)}$

Exercice 3

Partie A

1. Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$

   a) Une densité de U est f : $f\left(t\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$ avec $\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $m=0$ donc

   Conclusion : $\boxed{\text{une densité de } U \text{ est } f : f\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}}$

b) Comme $E(U)=0$ alors $E(U^2)=V(U)$

Donc U^2 a une espérance.

$E\left(U^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ et par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$

Donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = V(U)\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leq 0, & F(x)=0 \\ \forall x>0, & F(x)=1-e^{-x^2} \end{cases}$

2. On vérifie les critères pour être fonction de répartition de variable aléatoire à densité :

- F est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$
  En 0^+ :F$(x)=1-e^{-x^2}\to 0=F(0)$ donc F est continue en 0^+ donc sur $\mathbb{R}$
- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
- $F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x>0 \end{cases} \geq 0$ et continue en 0 donc F est croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim_{-\infty} F = \lim_{-\infty} 0 = 0$ et enfin
- $\lim_{+\infty} F = \lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x^2} = 1$

Conclusion : $\boxed{F \text{ est une fonction de répartition de variable à densité}}$

Conclusion : $\boxed{\text{une densité est } f : f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}}$

3. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

a) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt$ qui est impropre en $\pm\infty$

- $\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 = 0$
- $\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (car on connaît déjà la convergence de celle là)

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance } E(X) \text{ et que } E(X)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

b) On résout :

- si $y<0$ alors $(X^2\leq y)$ est impossible et $\mathrm{P}(X^2\leq y)=0$
- si $y\geq 0$ alors $(X^2\leq y) = \left(|X|\leq\sqrt{y}\right) = \left(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\right)$ et comme $-\sqrt{y}\leq\sqrt{y}$ alors
  $\mathrm{P}(X^2\leq y) = \mathrm{F}\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right)$ avec $-\sqrt{y}<0$
  $\mathrm{P}(X^2\leq y) = \mathrm{F}\left(\sqrt{y}\right) = 1-e^{-y}$

c) Comme la fonction de répartition G de X^2 est continue sur $\mathbb{R}$ (y compris en 0) et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ alors X^2 est à densité et a pour densité

$g(t)=G'(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\leq 0 \\ e^{-t} & \text{si } t>0 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X^2 \hookrightarrow \varepsilon(1) : E(X^2)=1}$

Comme X et X^2 ont une espérance alors X a une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Conclusion : $\boxed{V(X) = 1 - \dfrac{\pi}{4}}$

Partie B

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$

   On a $E(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$

2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes Z_1, Z_2, ..., Z_n, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p.

   on considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

   a) On a $E(M_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(Z_i) = \dfrac{n}{np} = \dfrac{1}{p}$

      Et comme les (Z_i) sont indépendantes,

      $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(Z_i) = \dfrac{1-p}{np^2}$

      Conclusion : $\boxed{m = \dfrac{1}{p} : \sigma_n = \sqrt{\dfrac{1-p}{n}}\dfrac{1}{p}}$

   b) Comme les (Z_i) sont indépendantes suivant une même loi ayant une espérance et une variance

      alors la moyenne centrée réduite converge en loi vers la loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(0 \leq \frac{M_n - m}{\sigma_n} \leq 1\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(1) - \Phi(0) &= \int_0^1 \varphi(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\end{aligned}$$

      Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}$