ecricome 2005 option éco : corrigé rapide

exercice 1

1. $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = [-\frac{1}{2}e^{-2x}]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2} = \frac{e^2-1}{2e^2}$

$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-2x}dx = [-\frac{1}{2}(1-x)e^{-2x}]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx$

On a effectué une intégration par parties avec
u = 1 – x, v' = e^{-2x} , u' = –1, v = –(1/2)e^{-2x}.
u et v sont de classe C^1 sur [0, 1].

$I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2-1}{4e^2}$

2. Pour tout n dans **N**, pour tout x dans [0, 1], $0 \le 1 - x \le 1$, $0 \le (1-x)^{n+1} \le (1-x)^n$,
$0 \le (1-x)^{n+1}e^{-2x} \le (1-x)^n e^{-2x}$ car $e^{-2x} \ge 0$, donc

$0 \le \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx \le \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx$

$0 \le I_{n+1} \le I_n$

La suite (I_n) est donc décroissante. On pouvait aussi former $I_{n+1} - I_n$.

3. C'est fait : $I_n \ge 0$ pour tout n.

4. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

5. Pour tout x dans [0, 1], $-2x \le 0$, $e^{-2x} \le 1$.

6. Donc $(1-x)^n e^{-2x} \le (1-x)^n$ car $(1-x)^n \ge 0$, donc

$\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \le \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

7. La suite (I_n) est encadrée par deux suites de limite nulle, elle est donc elle-même de limite nulle.

8. $2I_{n+1} = \int_0^1 2(1-x)^{n+1}e^{-2x}dx = [-e^{-2x}(1-x)^{n+1}]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx$

On a effectué l'intégration par parties avec
u = $(1-x)^{n+1}$, v' = $2e^{-2x}$, u' = $-(n+1)(1-x)^n$, v = e^{-2x}
u et v sont de classe C^1 sur [0, 1].
On obtient bien $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.

9. $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$, donc
$(n+1)I_n = 1 - 2I_{n+1}$, donc
$\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = 1$. Or $(n+1)I_n \sim_{n\to+\infty} n I_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} n I_n = 1$.

10. $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$, donc
$2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n$
$1 - nI_n = 2I_{n+1} + I_n$
$n(1 - nI_n) = 2nI_{n+1} + nI_n$
(L'idée était de former l'expression $n(nI_n - 1)$.)
nI_n tend toujours vers 1, $2nI_{n+1}$ est équivalent à $2(n+1)I_{n+1}$, donc tend vers 2, $n(1 - nI_n)$ tend donc vers 3, et donc la limite de $n(nI_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$ est –3.

11. $\lim_{n\to+\infty}\left[n(nI_n - 1) + 3\right] = 0$, donc

$n[nI_n - 1) + 3 = \varepsilon(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$. Donc

$$nI_n - 1 + \frac{3}{n} = \frac{\varepsilon(n)}{n}$$

$$nI_n = 1 - \frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$$

(On a donc a = 0, b = 1, c = –3.)

exercice 2 $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$ si $x > 0$, $f(0) = -1$.

2.1.1. f est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme de fonctions continue sur $]0, +\infty[$. f est continue en 0 car $\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim_{x\to0} f(x) = -1 = f(0)$. Donc f est continue sur $\mathbf{R}^+$.

2. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 - x\ln(x) - 1 + 1}{x} = x - \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

car ln(x) est négligeable devant x quand x tend vers $+\infty$. f n'est donc pas dérivable en 0, et la représentation graphique de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

3. $f'(x) = 2x - \ln(x) - 1$; $f''(x) = 2 - 1/x = (2x - 1)/x$ du signe de $2x - 1$, c'est-à-dire positive sur $[0, 1/2[$, négative sur $]1/2, +\infty[$.. Par conséquent f est concave sur $[0, 1/2]$, convexe sur $]1/2, +\infty[$. Tant qu'on y est, étudions les variations de f ' :

x	0	1/2	$+\infty$
f ''(x)	–	0	+
f '(x)	↘	ln(2)	↗

Le minimum de f ' est donc positif, f ' est donc positive sur $]0, +\infty[$, f est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Pour la limite en $+\infty$:

$$f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \text{donc} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

x	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	–1	↗	$+\infty$

4. f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et

$\dfrac{f(x)}{x} = x - \ln(x) - \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car ln(x) est négligeable devant x.

Donc la représentation graphique de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

5. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $f(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc f définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.

6. f^{-1} et f ont même sens de variations, donc f^{-1} est strictement croissante.
$\lim_{+\infty} f = +\infty$, donc $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$.

7. Tout entier naturel k appartient à l'intervalle $[-1, +\infty[$, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$, donc il existe x_k unique dans $[0, +\infty[$ tel que $f(x_k) = k$. $f(0) = -1 \neq k$, donc $x_k > 0$.

a) $f(1) = 0$ donc $x_0 = 1$.

b) f est strictement croissante, $f(1,5) \approx 0,6 < 1$, $f(2) \approx 1,6 > 1$, donc $1,5 < x_1 < 2$. De même, $2 < x_2 < 2,5$.

c) $f(x_k) = k$, donc $x_k = f^{-1}(k)$.

$k < k + 1$ et f^{-1} est strictement croissante, donc $f^{-1}(k) < f^{-1}(k + 1)$, $x_k < x_{k+1}$: la suite (x_k) est strictement croissante.

$f^{-1}(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc $x_k = f^{-1}(k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$.

8. a)

$\varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$, donc $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2+x}{x^2}$

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		–	0	+	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	ln(2) + 1	↗	$+\infty$

Limite en 0 : $\varphi(x) = \dfrac{2 + x\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

b) φ est strictement décroissante sur [3/2, 2], donc $\forall\ x \in [3/2, 2]$, $\varphi(2) \le \varphi(x) \le \varphi(3/2)$;
$\varphi(3/2) \approx 1{,}73$, donc $\varphi(3/2) \le 2$;
$\varphi(2) \approx 1{,}69$, donc $\varphi(2) \ge 3/2$;
donc $\forall\ x \in [3/2, 2]$, $3/2 \le \varphi(x) \le 2$;
donc $\varphi(\ [3/2, 2]\ ) \subset [3/2, 2]$.

c) $\varphi'(x) = \dfrac{-2+x}{x^2}$; $\varphi''(x) = \dfrac{-x^2+4x}{x^4} = \dfrac{x(4-x)}{x^4} = \dfrac{4-x}{x^3}$

φ'' est donc *positive* sur [3/2, 2], φ' est donc *strictement croissante* sur [3/2, 2], et d'autre part φ' est *négative* sur ce même intervalle, donc
$\forall\ x \in [3/2, 2]$, $\varphi'(3/2) \le \varphi'(x) \le \varphi'(2) < 0$;
On a $\varphi'(3/2) = -2/9$, donc
$\forall\ x \in [3/2, 2]$, $|\varphi'(x)| \le 2/9$.

d) Pour tout x positif :

$$x = \varphi(x) \iff x = \frac{2}{x} + \ln(x) \iff \ln(x) - x + \frac{2}{x} = 0 \iff \frac{x\ln(x) - x^2 + 2}{x} = 0$$

$$\iff x^2 - x\ln(x) - 2 = 0 \iff x^2 - x\ln(x) - 1 = 1 \iff f(x) = 1$$

Par définition, x_1 est l'unique réel positif solution de l'équation f(x) = 1, c'est donc l'unique solution de l'équation équivalente x = φ(x).

e) $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $3/2 \le u_n \le 2$ se prouve par récurrence : c'est vrai pour n = 0 car $u_0 = 3/2$, et si c'est vrai pour n fixé dans **N**, alors c'est vrai pour n + 1, car $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [3/2, 2]$ d'après 8.b.
$x_1 \in [3/2, 2]$ d'après 7.b, on vient de voir que $u_n \in [3/2, 2]$, et sur [3/2, 2], $|\varphi'| \le 2/9$. La formule des accroissements finis fournit alors
$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \le (2/9)\ |u_n - x_1|$
$|u_{n+1} - x_1| \le (2/9)\ |u_n - x_1|$
On obtient alors, de proche en proche :
$|u_n - x_1| \le (2/9)|u_{n-1} - x_1| \le (2/9)^2|u_{n-2} - x_1| \le \ldots \le (2/9)^n|u_0 - x_1| \le (2/9)^n|3/2 - x_1|$
Et donc $|u_n - x_1| \le (2/9^n$ car $x_1 \in [3/2, 2]$, donc $|3/2 - x_1| \le 1/2 \le 1$.

f) 0 < 2/9 < 1, donc $(2/9)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc u_n tend vers x_1 quand n tend vers $+\infty$.

2.2 $g(x, y) = xe^y - ye^x$.

1. $g'_x(x, y) = e^y - y\,e^x$; $g'_y(x, y) = x\,e^y - e^x$.

2. Si g admet un extremum local en (a, b), alors

$$\begin{cases} g'_x(a,b) = 0 \\ g'_y(a,b) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^b - be^a = 0 \\ ae^b - e^a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^b = be^a \\ a(be^a) - e^a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^b = be^\alpha \\ e^a(ab-1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^b = be^a \\ ab = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{a}} = \dfrac{1}{a}e^a \\ ab = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = e^a e^{-\frac{1}{a}} \\ ab = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = e^{a-\frac{1}{a}} \\ ab = 1 \end{cases}$$

$a = e^{a-\frac{1}{a}}$, donc a > 0.
ab = 1 est acquis.

$a = e^{a - \frac{1}{a}}$, donc ln(a) = a – 1/a, a ln(a) = a^2 – 1, a^2 – a ln(a) – 1 = 0, f(a) = 0
On a vu que l'équation f(a) = 0 admet 1 pour unique solution dans]0, +∞[, donc
a = 1, puis b = 1.

3. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -ye^x$; $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^y - e^x$; $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = xe^y$

Donc r = –e, s = 0, t = e, rt – s^2 = –e^2 < 0. g n'admet donc pas d'extremum local en (1, 1). Comme c'était le seul point ou g était susceptible d'avoir un extremum, on peut conclure que g n'admet pas d'extremum local sur $\mathbf{R}^2$.

exercice 3

Deux exercices d'analyse, il reste 1 exercice pour parler des probas et de l'algèbre linéaire ! Et ça ne s'annonce pas sous les meilleurs auspices... Voyons voir les connaissances exigibles des candidats à propos des problèmes du second degré :
En 1^e ES : " Résolution d'équations et d'inéquations du second degré."
En T^{ale} ES : Rien.
En ECE1 : "Trinômes du second degré. Factorisation par (x – a) dans un polynôme ayant a pour racine."
En commentaire : "On reviendra sur le calcul et les propriétés des racines du trinôme ainsi que sur son signe, en liaison avec les représentations graphiques." Admirez le "On reviendra…" !
En ECE2 : Rien.
Il va donc falloir traiter la première question avec ces maigres connaissances, et une pratique nécessairement limitée de la part des candidats qui ont eu d'autres chats à fouetter au cours de ces deux dernières années ! C'est d'autant plus regrettable que la résolution de cette première question, et une bonne maîtrise des problèmes du second degré, sont nécessaires à la résolution de bien des questions suivantes…

3.1. f(x) = x^2 – qx – pq

1. Le discriminant de f(x) est égal à q^2 + 4pq, il est donc strictement positif, l'équation f(x) = 0 possède donc deux racines distinctes r_1 et r_2. On peut donc factoriser f(x) par x – r_1 et x – r_2, et on a, vu les coefficients des termes en x^2 :
f(x) = x^2 – qx – qp = (x – r_1)(x – r_2)
x^2 – qx – qp = x^2 – (r_1 + r_2)x + r_1r_2
soit, par identification :

$$\boxed{\begin{array}{l} r_1 + r_2 = q \\ r_1 r_2 = -p \end{array}}$$

On peut évidemment calculer r_1 et r_2, puis r_1 + r_2 et r_1 r_2, mais c'est plus long !

2. f(1) = 1 – q – qp = 1 – (1 – p) – (1 – p)p = p – p + p^2 = p^2.
f(–1) = 1 + q – qp = 1 + 1 – p – (1 – p)p = 2 – p – p + p^2 = 2(1 – p) + p^2
f(0) = –pq.

3. f(x) est négatif entre les racines, positif à l'extérieur des racines r_1, r_2.
f(0) < 0, f(1) > 0, f(–1) > 0, donc $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$. r_1 et r_2 sont donc tous deux de valeur absolue inférieure à 1.
$r_1 + r_2 = q > 0$, donc $|r_1| < |r_2|$, car $|r_1| = -r_1$, $|r_2| = r_2$ …
On a bien $0 < |r_1| < |r_2|$.

3.2.1. (Bon sang, mais comment se débrouiller avec cette numérotation ??) Avec des notations évidentes, mais que l'énoncé ferait bien de rappeler, ne serait-ce que dans un souci d'harmonisation :
$a_1 = P(A_1) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)\, P(P_2) = p^2$ (indépendance des lancers successifs).
$a_2 = P(A_2) = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = p(F_1)\, P(P_2)\, P(P_3) = q\, p^2$.
$a_3 = P(A_3) = P[\, (P_1 F_2 P_3 P_4) \cup (F_1 F_2 P_3 P_4)\,]$
$= P(P_1 F_2 P_3 P_4) + P(F_1 F_2 P_3 P_4)$ par incompatibilité des événements
$= p^3 q + p^2 q^2$.

2. La remarque n'est pas d'une clarté aveuglante, faisons semblant de comprendre, et écrivons avec des notations certainement discutables :

$a_n = P(A_3) = P[\ (P_1 \cap F_2 \cap A_n) \ \cup (F_1 \cap A_{n+1})\ ]$

$= P\ (P_1 \cap F_2 \cap A_n) \ + P(F_1 \cap A_{n+1})$ par incompatibilité des événements

$= p\ q\ a_n + q\ a_{n+1}$ par indépendance des lancers successifs.

3. D'une part on ne peut pas donner p ET q comme on veut, car $p = 1 - q$, d'autre part demander d'afficher les valeurs de a_n même pour n = 0 et n = 1 alourdit le programme bien inutilement. Pour éviter des appels multiples dans une procédure récursive, on adopte une stratégie itérative :

```
program ecr05;
var n,k:integer;a,b,c,p,q:real;
BEGIN
readln(n,p);
q:=1-p;
a:=0;
b:=p*p;
for k:=2 to n do
  begin
    c:=q*p*a+q*b;
    a:=b;
    b:=c;
  end;
if n=O then writeln(0);
if n=1 then writeln(p*p);
if n >=2 then writeln(c);
END.
```

4. La suite (a_n) est une suite linéaire récurrente à deux termes, d'équation caractéristique

$x^2 - qx - qp = 0$,

dont les solutions sont r_1, r_2. On a donc

$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \alpha r_1^{\,n} + \beta r_2^{\,n}$

Avec n = 0, et n = 1, on obtient

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ p^2 = \alpha r_1 + \beta r_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha(r_1 - r_2) = p^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -\dfrac{p^2}{r_1 - r_2} \\ \alpha = \dfrac{p^2}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

Et en reportant, on obtient bien

$$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^{\,n} - r_1^{\,n})$$

5.

$$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^{\,n} - r_1^{\,n}) = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^{\,n}\left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p^2}{r_2 - r_1} r_2^{\,n}$$

car $0 < |r_1| < |r_2| < 1$, donc $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n = 0$,

et on rappelle que $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n/v_n) = 1 \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n) \Leftrightarrow u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ avec ε_n de limite nulle en $+\infty$.

3.3.1.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$AX_n = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2)a_{n+1} - r_1r_2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Or $a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n$ d'après 2

$= (r_1 + r_2)a_{n+1} - r_1r_2a_n$ d'après 3.1.1. D'où la conclusion : $X_{n+1} = AX_n$.

2. $A - r_1I$ n'est pas inversible car ses deux vecteurs colonnes C_1, C_2 sont colinéaires, $C_2 = -r_1C_1$:

$$A - r_1C_1 = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}.$$

De même $A - r_2I$ n'est pas inversible car ses deux vecteurs colonnes C_1, C_2 sont colinéaires, $C_2 = -r_2C_1$:

$$A - r_2C_1 = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi utiliser la méthode du pivot.

3. $A - r_1I$ et $A - r_2I$ ne sont pas inversibles, donc r_1 et r_2 sont deux valeurs propres, distinctes, de A, donc A est diagonalisable.

4. On utilise la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow r_1L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_1 - r_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow (r_1 - r_2)L_1 - r_2L_2$$

$$\begin{pmatrix} (r_1 - r_2)r_1 & 0 \\ 0 & r_1 - r_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r_1 & -r_2r_1 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{(r_1 - r_2)r_1}L_1 \quad ; \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{r_1 - r_2}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 - r_2} & \frac{-r_2}{r_1 - r_2} \\ \frac{-1}{r_1 - r_2} & \frac{r_1}{r_1 - r_2} \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible, et

$$P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2}\begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$$

5. On peut faire le calcul pas à pas de $P^{-1}AP$, on peut aussi remarquer que

$$A\begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} = r_1\begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A\begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix} = r_2\begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le fait que A soit diagonalisable permet alors de conclure, grâce à la théorie du changement de base :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

6. On a $X_0 = PD^0P^{-1}X_0$ car $PD^0P^{-1} = I$, et si $X_n = PD^nP^{-1}X_0$, alors

$X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$,

d'où la conclusion, par récurrence.

7. Écrivons le résultat précédent, puis effectuons les calculs de droite à gauche :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{\ n} & 0 \\ 0 & r_2^{\ n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{\ n} & 0 \\ 0 & r_2^{\ n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ -p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{\ n} p^2 \\ -r_2^{\ n} p^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} (r_1^{\ n+1} - r_2^{\ n+1}) p^2 \\ (r_1^{\ n} - r_2^{\ n}) p^2 \end{pmatrix}$$

Et on retrouve le résultat du 3.2.4.

3.4.1. La convergence de la série est acquise, de par la sigma-additivité de la probabilité, et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^{\ n} - r_1^{\ n}) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r_2^{\ n} - \sum_{n=1}^{+\infty} r_1^{\ n} \right)$$

$$= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{1 - r_2} - 1 - \left(\frac{1}{1 - r_1} - 1 \right) \right] = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{1 - r_2} - \frac{1}{1 - r_1} \right]$$

$$= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \frac{1 - r_1 - 1 + r_2}{(1 - r_1)(1 - r_2)} = \frac{p^2}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{p^2}{1 - q - pq} = \frac{p^2}{1 - (1-p) - p(1-p)}$$

$$= \frac{p^2}{p - p + p^2} = 1$$

2. Sous réserve de convergence (absolue) :

$$E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) P(T = n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{p^2}{r_2 - r_1} (r_2^{\ n} - r_1^{\ n}) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) r_2^{\ n} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) r_1^{\ n} \right]$$

On effectue le changement d'indice k = n + 1, ce qui permet de se ramener à des séries géométriques dérivées convergentes car de raison de valeur absolue inférieure à 1, et donc d'une part d'assurer la validité du calcul précédent, d'autre part de continuer !

$$E(T) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\sum_{k=2}^{\infty} k r_2^{\ k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} k r_1^{\ k-1} \right] = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{(1 - r_2)^2} - 1 - \left(\frac{1}{(1 - r_1)^2} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{(1 - r_2)^2} - \frac{1}{(1 - r_1)^2} \right] = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \frac{(1 - r_1)^2 - (1 - r_2)^2}{(1 - r_1)^2 (1 - r_2)^2}$$

On a déjà calculé $(1 - r_1)(1 - r_2)$, on a trouvé p^2, et d'autre part

$(1 - r_1)^2 - (1 - r_2)^2 = (1 - r_1 - 1 + r_2)(1 - r_1 + 1 - r_2) = (r_2 - r_1)(2 - (r_1 + r_2)) = (r_2 - r_1)(2 - q)$

$= (r_2 - r_1)(2 - (1 - p)) = (r_2 - r_1)(1 + p)$

On termine donc le calcul en écrivant :

$$E(T) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \frac{(r_2 - r_1)(1 + p)}{p^4} = \frac{1 + p}{p^2}$$