corrigé ecricome 2007 option économique

exercice 1

$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$, $t > 0$

1.1.1 $\lim_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty$; $f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t}$ est positif et tend vers 0 quand t tend vers +∞, donc la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote à C_f, et C_f est au dessus de D.

1.1.2 $\lim_0 f_a = +\infty$: la droite déquation $x = 0$ est asymptote à C_f.

1.1.3 $f_a'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2-a^2}{t^2}\right)$

t	$-\infty$		a		$+\infty$
$f_a{}'$		$-$	0	$+$	
$f_a{}'$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

1.1.4 D'après le tableau de variations, le minimum de f_a est a…

1.2.1 Si $u_0 = a$, alors $u_1 = a$, … $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = a$ (par récurrence. Ou bien : a est un point fixe de f_a, donc…).

1.2.2 Pour tout $t > a$, $f_a'(t) = \frac{1}{2}\frac{t^2-a^2}{t^2} < \frac{1}{2}$ car $0 < t^2 - a^2 < t^2$ donc $0 < \frac{t^2-a^2}{t^2} < 1$.

1.2.3 $u_1 = f_a(u_0) \geq a$ d'après 1.1.4, et si $u_n \geq a$, alors $u_{n+1} = f_a(u_n) \geq a$, d'où la conclusion, par récurrence.

1.2.4 La formule des accroissements finis appliquée à f_a, a, u_n fournit le premier résultat, car $f_a' < \frac{1}{2}$ sur $[a, +\infty[$, et $u_n, a \in [a, +\infty[$. L'habituelle récurrence fournit le deuxième résultat, compte tenu de $|u_n - a| = u_n - a$ …

1.2.5 Sans aucun doute, la limite de la suite (u_n) est a.

1.2.6 En étant le plus économique possible (et avec $a^2 = 2$) :

```
program ecr07 ;
var u:real;k:integer ;
BEGIN
 u:=1;writeln(u);
 for k:=1 to n do
   begin u:=0.5*(u+2/u);writeln(u); end;
END.
```

1.3.1 $p = \frac{1}{2}(1+y)\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\right)$; $q = \frac{1}{2}(1+x)\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\right)$

1.3.2 En fait, vue la question, on n'est pas obligé de résoudre le système $p = 0$; $q = 0$. On peut se contenter de remarquer qu'au point (1, 1), on a effectivement $p = q = 0$… Mais la résolution du système n'est pas insurmontable : compte tenu de $x > 0, y > 0$, on trouve successivement :

$\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x}$; $\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x}$; $\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$ et $x^4 = x$

$x^4 = x \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ car $x > 0$. Et on peut donc dire que g admet (1, 1) pour unique point critique. Ce n'est pas fini :

$r = \frac{1}{2}(1+y)\frac{2}{x^3}$; $s = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$; $t = \frac{1}{2}(1 = x)\frac{2}{y^3}$

En (1, 1), $p = q = 0$, $r = 2$, $s = -1$, $t = 2$, $rt - s^2 = 3 > 0$, $r > 0$, donc g admet un extremum local en (1, 1) , et cet extremum est un minimum.

1.3.3 En développant les deux expressions proposées, on constate qu'elles sont toutes les deux égales à

$$1+\frac{1}{2}\left(x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

On peut donc dire que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$,

$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(x,y)$

1.3.4 Pour tout $x > 0,\ y > 0$, d'après la question précédente et la question 1.1.4 :

$g(x,y) \geq 1 + f_1(1) + f_1(1) + f_1(1) = 4$

D'autre part $g(1,1) = 4$: on peut donc dire que $g(1,1)$ est un minimum global de g.

exercice 2

2.1.1 Effectivement, $A^2 = A$. Un polynôme annulateur de A est donc $X^2 - X$, dont les racines sont 0 et 1. Les valeurs propres possibles de A sont donc 0 et 1.

2.1.2 On peut résoudre comme d'habitude le système $(A - \lambda \mathrm{I})X = 0$, ou bien résoudre les deux systèmes $AX = 0$, $AX = X$, on constate dans les deux cas que 0 et 1 sont effectivement valeurs propres de A, donc que A est diagonalisable, et la théorie du changement de base fournit alors

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (imposé par l'énoncé), $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (par exemple).

La méthode du pivot fournit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2.2.1 Pour tout M, M' appartenant à **M₂(R)** et tout x appartenant à **R**, on a

$\Phi_A(M+M') = A(M+M') - (M+M')A = AM - MA + AM' - M'A = \Phi_A(M) + \Phi_A(M')$

$\Phi_A(xM) = A(xM) - (xM)A = x(AM - MA) = x\Phi_A(M)$

Φ_A est donc une application linéaire de **M₂(R)** dans **M₂(R)**, c'est-à-dire un endomorphisme de **M₂(R)**.

2.2.2 On doit établir que $\Phi_A{}^3\ (= \Phi_A \circ \Phi_A \circ \Phi_A) = \Phi_A$. Or ceci n'est pas tout à fait évident. On utilise bien entendu $A^2 = A$:

$\Phi_A(M) = AM - MA$;

$$\begin{aligned}\Phi_A \circ \Phi_A(M) &= \Phi_A(AM - MA) = A(AM - MA) - (AM - MA)A \\ &= AM - AMA - AMA + MA = AM + MA - 2AMA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_A \circ \Phi_A \circ \Phi_A(M) &= A(AM + MA - 2AMA) - (AM + MA - 2AMA)A \\ &= AM + AMA - 2AMA - AMA - MA + 2AMA \\ &= AM - MA = \Phi_A(M)\end{aligned}$$

Un polynôme annulateur de Φ_A est donc $X^3 - X$, donc les valeurs propres possibles de Φ_A sont les racines de $X^3 - X = X(X^2 - 1)$, c'est-à-dire 0, 1, -1.

2.2.3 M est un vecteur propre de Φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si M est non nul et $\Phi_A(M) = AM - MA = \lambda M$, si et seulement si $N = P^{-1}MP$ est non nul et

$PDP^{-1}PNP^{-1} - PNP^{-1}PDP^{-1} = \lambda PNP^{-1}$

$\Leftrightarrow P(DN - ND)P^{-1} = P(\lambda N)P^{-1}$

$\Leftrightarrow DN - ND = \lambda N$

2.2.4 a $DN - ND = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0$

$$\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b $M \in Ker(\Phi_A) \Leftrightarrow M = PNP^{-1}$ avec N comme dans le **a**, donc $M \in Ker(\Phi_A)$ ssi

$M = PNP^{-1} = aP\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + dP\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = aM_1 + dA$

(A, M_1) est donc une famille génératrice de $Ker(\Phi_A)$. Comme cette famille est libre (les deux matrices sont non colinéaires), il s'agit d'une base de $Ker(\Phi_A)$.
c et **d** Les autres valeurs propres sont à chercher parmi 1 et −1, d'après 2.2.2.
Avec $\lambda = 1, DN - ND = N \Leftrightarrow 0 = a\,;\ -b = b\,; c = c\,; 0 = \mathrm{d} \Leftrightarrow N = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
E_1 est donc l'ensemble des matrices $M = cP\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = c\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. E_1 est donc le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.
Avec $\lambda = -1, DN - ND = -N \Leftrightarrow 0 = -a\,;\ -b = -b\,; c = -c\,; 0 = -\mathrm{d} \Leftrightarrow N = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
E_{-1} est donc l'ensemble des matrices $M = bP\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = b\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$. E_{-1} est donc le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.
2.2.5 La somme des sous-espaces propres de Φ_A est égale à 4, qui est la dimension de **M₂(R)**, donc Φ_A est diagonalisable.

exercice 3

3.1.1 a A partir de la loi du couple, on trouve les lois marginales :

$S \downarrow \quad U \rightarrow$	0	1	loi de T
0	0,4	0,3	0,7
1	0,2	0,1	0,3
loi de U	0,6	0,4	

Et effectivement, $0{,}6 = \frac{3}{5}$ ….
b $\mathrm{Cov}(S, U) = \mathrm{E}(SU) - \mathrm{E}(S)\mathrm{E}(\mathrm{U}) = 0{,}1 - 0{,}3 \times 0{,}4 = -0{,}02 \neq 0$, donc S et U ne sont pas indépendantes (en effet, si deux v.a sont indépendantes, alors leur covariance est nulle.)
c Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathrm{P}_{(U=1)}(S = 1) = \frac{\mathrm{P}(S = 1 \cap U = 1)}{\mathrm{P}(\mathrm{U} = 1)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

3.1.2 a C_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{3}{5}$ car les règlements sont indépendants.

$$\mathrm{E}(C_n) = \frac{3n}{5} \quad ; \quad \mathrm{V}(C_n) = n\frac{3}{5}\frac{2}{5} = \frac{6n}{25}$$

b Une question classique (la loi géométrique tronquée).
L_1 prend ses valeurs dans $\{0\,;1\,; \ldots.\,; n\}$. Par indépendance des modes de règlement, on a

$$\text{Pour } k \neq 0, \mathrm{P}(L_1 = k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\frac{3}{5} \quad ; \quad \mathrm{P}(L_1 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(L_1 = k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n} + \frac{3}{5}\,\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n}}{1 - \frac{2}{5}} = 1$$

c Plus difficile. L_2 prend les valeurs entières de 0 à n, sauf 1, et comme dans le cas précédent il faut traiter à part le cas où $k = 0$:
Pour $k \neq 0, (L_2 = k)$ est l'intersection de l'événement « 1 seul paiement par carte parmi les $k-1$ premiers » , c'est-à-dire $(C_{k-1} = 1)$, et de l'événement « le paiement n°k est par carte ». Par indépendance des paiements, on a donc

$$\forall k \in \{2, \dots, n\}, \mathrm{P}(L_2 = k) = \binom{k-1}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2} \times \frac{3}{5} = (k-1)\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}$$

$(L_2 = 0)$ est la réunion des deux événements incompatibles $(C_n = 0), (C_n = 1)$, et donc

$$\mathrm{P}(L_2 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\frac{3}{5}$$

3.2.1 X qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 a pour densité g telle que
$g(t) = 0$ si $t < 0$, $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$ si $t \geq 0$
X a pour espérance et pour variance 1.
3.2.2 f est continue sur $]0\,; +\infty[$ (produit de fonctions continues) et sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) ; f est positive ou nulle sur **R** ; et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{E}(X) = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité.
Sous réserve de convergence, on a :

$$\mathrm{E}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad \text{car } f \text{ est nulle en dehors de }]0\,; +\infty[$$

Or $\mathrm{V}(X) = 1 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$ donc $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2 = 1 + 1 = 2$. Mais

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad \text{donc}$$

$\mathrm{E}(T) = 2$, temps moyen de passage en caisse.
3.2.3 a Il suffit de vérifier que F_T est continue sur **R**, de classe C^1 sur **R** privé d'un nombre fini de points, que sur cet ensemble F_T a pour dérivée la fonction f… et que par exemple la limite de F_T en $-\infty$ est égale à 0… Aucun de ces points ne pose de problème, le difficile est d'être exhaustif. Calculons par exemple la dérivée de F_T sur $]0, +\infty[$:
$\forall x > 0, F_T'(x) = -[\mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x}] = \mathrm{e}^{-x}$
F_T est donc bien la fonction de répartition de T.
b Encore une probabilité conditionnelle :

$$\mathrm{P}_{T>1}(T \leq 2) = \frac{\mathrm{P}(1 < T \leq 2)}{\mathrm{P}(T > 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} = \frac{(1 - 3\mathrm{e}^{-2}) - (1 - 2\mathrm{e}^{-1})}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-1})} = \frac{2\mathrm{e}^{-1} - 3\mathrm{e}^{-2}}{2\mathrm{e}^{-1}} = \frac{2\mathrm{e} - 3}{2\mathrm{e}}$$

3.2.4 a Humpf, la situation ne parait pas très réaliste… $M = \min(T_A, T_B)$.
b Il faut commencer par… $(M > t) = (T_A > t) \cap (T_B > t)$. Eh oui ! Après,
$\mathrm{P}(M > t) = \mathrm{P}(T_A > t)\mathrm{P}(\mathrm{T_B} > t)$ car T_A et T_B sont indépendantes. Si $t \leq 0$, cette probabilité est égale à 1. Si $t > 0$, on obtient
$\mathrm{P}(M > t) = [1 - F_T(t)]^2 = [1 - 1 + (1+t)\mathrm{e}^{-t}]^2 = (1+t)^2\mathrm{e}^{-2t}$
En appelant $F_M$la f.r de M, on obtient bien, compte tenu de $\mathrm{P}(M \leq t) = 1 - \mathrm{P}(M > t)$, l'expression donnée.
c F_M est continue sur **R** (fonction nulle, somme, raccordement en 0…), de classe C^1 sur **R***, donc F_M est la f.r d'une va à densité.Si $t < 0, F_M'(t) = 0$, et si $t > 0$:
$F_M'(t) = -[2(1 = t)\mathrm{e}^{-2t} + (1+t)^2(-2)\mathrm{e}^{-2t}] = -2(1+t)\mathrm{e}^{-2t}\big(1 - (1+t)\big) =$
$2t(1+t)\mathrm{e}^{-2t}$
Une densité f_M est donc $f_M(t) = 0$ si $t < 0$; $f_M(t) = 2t(1+t)\mathrm{e}^{-2t}$ si $t \geq 0$