ecricome 2008 option économique : corrigé – pas si rapide que ça
exercice 1
1°) Pour tout couple (a, b) de réels, $M(a, b) = a\,I + b\,A$. E est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I, A, donc un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$, et (I, A) est une famille génératrice de E.
2°) Or cette famille est libre : $aI + bA = 0 \Rightarrow M(a, b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$. Il en résulte qu'il s'agit d'une base de E, et que E est de dimension 2.
3°) Le système d'équations $AX = X$ est équivalent à l'unique équation

$$x - y - 2z = 0$$

dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}\big((1,1,0), (2,0,1)\big)$.
Le système d'équations $AX = 2X$ est équivalent au système

$$\begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}\big((1,2,-1)\big)$.
1 et 2 sont deux valeurs propres de A, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A associées à ces deux valeurs propres est égale à 3, ce qui permet de dire que A est diagonalisable.
4°) La théorie du changement de base et les contraintes de l'énoncé donnent $D = P^{-1}AP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot aboutit à

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5°) Surtout, ne pas faire le calcul $P^{-1}\,M(a, b)P$! On utilise $M(a, b) = aI + bA$, et on a, en appelant X_1, X_2, X_3 les trois vecteurs colonne de P :
$M(a, b)X_i = (aI + bA)X_i = aX_i + bAX_i = aX_i + b\lambda_i X_i = (a + b\lambda_i)X_i$
avec $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ce qui prouve que $M(a, b)$ est diagonalisable, puisque X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs propres de $M(a, b)$ pour les valeurs propres $a + 2b$, $a + b, a + b$, et qu'ils forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Le théorie du changement de base assure alors que $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale, les éléments de la diagonale étant $a + 2b$, $a + b$, $a + b$.
6°) $M(a, b)$ et $D(a, b)$ ont les mêmes valeurs propres, par conséquent $M(a, b)$ est inversible ssi 0 n'est pas valeur propre de $M(a, b)$, ssi 0 n'est pas valeur propre de $D(a, b)$, ssi $D(a, b)$ est inversible.
Les valeurs propres de $D(a, b)$ (et de $M(a, b)$) sont $a + 2b, a + b$, par conséquent $M(a, b)$ est inversible ssi $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.
7°) $[M(a, b)]^2 = I \Leftrightarrow [P\,D(a, b)P^{-1}]^2 = I \Leftrightarrow P[D(a, b)]^2P^{-1} = I \Leftrightarrow [D(a, b)]^2 = I$
$[D(a, b)]^2 = I \Leftrightarrow (a + 2b)^2 = 1$ et $(a + b)^2 = 1$
$\Leftrightarrow$ ($a + 2b = 1$ et $a + b = 1$) ou ($a + 2b = 1$ et $a + b = -1$)
ou ($a + 2b = -1$ et $a + b = 1$) ou ($a + 2b = -1$ et $a + b = -1$)
On trouve donc 4 couples de solutions (a, b) : $(1, 0)$; $(-3, 2)$; $(3, -2)$; $(-1,0)$, puis les 4 matrices $M(a, b) = P\,D(a, b)\,P^{-1}$ correspondantes.

exercice 2
2.1
1. Retour en fanfare du « domaine de définition ».
$g(x, y) = 1 + \ln(x + y)$ est défini ssi $x + y > 0$. Pour la représentation graphique, vous avez dû voir ce genre de choses en des temps anciens (régionnement du plan). On trace la droite d'équation $x + y = 0$ ($\Leftrightarrow y = -x$; la « deuxième bissectrice » ?), et on hachure le demi-plan « au-dessus » de cette droite, plus présisément celui qui contient le point $(1, 0)$ par exemple.
2. $p = \frac{1}{x+y}$; $q = \frac{1}{x+y}$. Sur l'*ouvert* D, p et q ne sont jamais égales à 0. La fonction g n'admet donc pas de point critique sur l'*ouvert* D, et par conséquent n'a pas d'extremum sur cet *ouvert*. Bien préciser, comme y invitait un rapport de jury récent, que D est un ouvert, les théorèmes sur la recherche des extrema ($p = q = 0, rt - s^2 > 0$, etc) s'appliquent pour des *ouverts*…
2.2
1. $f_1(x) = 1 + \ln(x + 1)$ est défini ssi $x + 1 > 0$, c'est-à-dire sur $]-1, +\infty[$.

2. Bon, ça devrait aller :

$$f_1(x) = 1 + \ln(x+1) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

avec ε de limite nulle en 0.

3. Pour l'équation de la tangente, pas besoin de D.L : $f_1'(x) = \frac{1}{x+1}$; $f_1'(0) = 1$. La tangente à C_1 au point d'abscisse 0 a donc pour équation

$y - f_1(0) = f_1'(0)(x-0)$; $y - 1 = x$; $y = x + 1$

Pour la position de la courbe par rapport à la tangente, oui :

$$f_1(x) - y = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - (1+x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

est du signe de $-\frac{x^2}{2}$, c'est-à-dire négatif, au voisinage de 0, car $x^2\varepsilon(x)$ est négligeable devant $-\frac{x^2}{2}$ au voisinage de 0.

La courbe C_1 est donc en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, au voisinage de ce point.

4. $\lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$, donc $\lim_{+\infty} f_1 = +\infty$.

$$\frac{f_1(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{x} + \ln\frac{\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

(Prudence avec l'utilisation des équivalents quand il y a des logarithmes…)

Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x} = 0$

Ces deux résultats permettent de dire que C_1 admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Là aussi un grand retour !

2.3

1. La fonction $h_p : x \mapsto x - 1 - \ln(x+p)$ est continue (somme de fonctions continues) et strictement croissante (car $h_p'(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p} > 0$ sur $]0,+\infty[$).

$h_p(0) = -1 - \ln p < 0$; $\lim_{+\infty} h_p = +\infty$ car $\ln(x+p) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

Donc l'équation $h_p(x) = 0$ admet une solution unique α_p sur $]0,+\infty[$, donc l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur $]0,+\infty[$.

2. $h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p)$. Par définition de α_{p+1}, $\alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p+1) = 0$.

On en déduit $\alpha_{p+1} - 1 = \ln(\alpha_{p+1}+p+1) = 0$, et par conséquent

$h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - 1 - \ln(\alpha_{p+1}+p) = \ln(\alpha_{p+1}+p+1) - \ln(\alpha_{p+1}+p) > 0$ car ln est strictement croissante.

$h_p(\alpha_p) = 0$; $h_p(\alpha_{p+1}) > 0$; h_p strictement croissante. Donc $\alpha_p < \alpha_{p+1}$, pour tout p. donc la suite (α_p) est strictement croissante.

3. $h_p(1+\ln p) = \ln p - \ln(1+\ln p+p) < 0$ car ln est strictement croissante ; $h_p(\alpha_p) = 0$; h_p est strictement croissante. Donc $\alpha_p \geq 1 + \ln p$. $\lim_{p\to+\infty}(1+\ln p) = +\infty$, donc $\lim_{p\to+\infty}\alpha_p = +\infty$.

2.4

1. La propriété à établir est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = 1 \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour n fixé dans **N**. Alors $u_{n+1} = f_1(u_n) \geq f_1(1)$ car $f_1(x) = 1 + \ln(x+1)$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Donc $u_{n+1} \geq 1 + \ln 2 \geq 1$: la propriété est vraie pour $n+1$.

On en conclut : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq 1$.

2. u_n et α_1 appartiennent à l'intervalle $[1,+\infty[$. Sur cet intervalle, $|f_1'(x)| = \left|\frac{1}{x+1}\right| = \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$. La formule des accroissements finis donne alors :

$$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \quad ; \quad |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \quad ;$$

puis le résultat annoncé, par récurrence : $|u_0 - \alpha_1| = |1 - \alpha_1| = \alpha_1 - 1 \leq 3 - 1 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$, et si $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, alors $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$, alors on aura $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$ d'après la question précédente. Or

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (n-1)\ln\frac{1}{2} \leq -4\ln 10 \Leftrightarrow n - 1 \geq \frac{-4\ln 10}{-\ln 2} = \frac{4\ln 10}{\ln 2}$$

$n_0 = 1 + \mathrm{Ent}\left(\frac{4\ln 10}{\ln 2}\right)$ convient donc. (Ent : partie entière).

4.

```
program ecr2008 ;
var n0,k:integer;u:real;
BEGIN
n0 :=1+Ent(4*ln(10)/ln(2)) ;
u:=1;
for k:=1 to n0 do u:= 1+ln(u+1);
writeln(n0,u);
END.
```

exercice 3

3.1

1. X_N est le nombre de succès lors de N épreuves identiques et indépendantes, la probabilité du succès à chaque épreuve étant 1/10. Donc

$$X_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{10}\right) \quad ; \quad \mathrm{E}(X_N) = \frac{N}{10} \quad ; \quad \mathrm{V}(X_N) = \frac{N}{10}\frac{9}{10} = \frac{9N}{100}$$

2. $Y_N = 3 \times X_N - N$: on gagne 3 euros par partie gagnée, à quoi il faut enlever 1 euro de mise par partie jouée.

On en déduit, en utilisant les célébrissimes formules $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$:

$$\mathrm{E}(Y_N) = 3\mathrm{E}(X_N) - N = -\frac{7N}{10} \quad ; \quad \mathrm{V}(Y_N) = 9\,\mathrm{V}(X_N) = \frac{81N}{100}$$

3. a. X_{60} a une espérance égale à 6, on a donc approximativement $X_{60} \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$.

b. Laissons tomber Y_{60}… En jouant 60 parties, le joueur a déjà perdu 60 euros. Pour qu'il perde moins de 50 euros, il faut et il suffit qu'il gagne au moins 4 parties (à 3 euros la partie gagnante). On cherche donc la probabilité de l'événement $X_{60} \geq 4$:

$\mathrm{P}(X \geq 4) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 3) = 1 - 0{,}1512 = 0{,}8488$ approximativement.

Il ne faut pas désespérer du hasard…

3.2

1. f est positive ou nulle, continue sur]0, 1[(fonction affine), et sur]−∞ , 0[et]1 , +∞ [(fonction nulle). Enfin, f est nulle en dehors de [0 , 1], donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\mathrm{d}t = [t^2]_0^1 = 1$$

f est donc bien une densité de probabilité.

f est nulle en dehors de [0 , 1], donc

$F(x) = 0$ si $x \leq 0$; $F(x) = 1$ si $x \geq 1$; $F(x) = \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2$ si $0 \leq x \leq 1$.

2. f est nulle en dehors de [0 , 1], donc

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

3. $[M > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap [X_3 > t]$.

4. Pour tout t réel, $F_M(t) = \mathrm{P}(M \leq t) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{M} > t) = 1 - [\mathrm{P}(X_1 > t)]^3$ car les X_i sont indépendantes et de même loi.

$$\mathrm{P}(X_1 > t) = 1 - P(X_1 \leq t) = 1 - F(t) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \ \ 0 \leq t \leq 1 \\ 1 - 1 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases} \text{, donc}$$

$$F_M(t) = 1 - [1 - F(t)]^3 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1 - t^2)^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

F est continue sur **R** et de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, donc $F_M(t) = 1 - [1 - F(t)]^3$ est continue sur **R** et de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. M est donc une variable aléatoire à densité, et on a

$F'_M(t) = 0$ si $t < 0$; $F'_M(t) = -(-2t)3(1 - t^2)^2 = 6t(1 - t^2)^2$ si $0 < t < 1$; $F'_M(t) = 0$ si $t > 1$

M admet donc pour densité par exemple la fonction f_M telle que

$$f_M(t) = \begin{cases} 6t(1 - t^2)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Le joueur gagne la partie ssi $M < \frac{1}{5}$, donc avec la probabilité

$$\mathrm{P}\left(M < \frac{1}{5}\right) = \mathrm{P}\left(M \leq \frac{1}{5}\right) = F_M\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3$$

3.3

Jusqu'ici l'énoncé a donné lieu à des calculs simples et classiques, il va se rattraper maintenant !

1. Au minimum, $T_n = 1$ si toutes les boules tombent dans la même case. Au maximum, si les boules tombent toutes dans des case différentes, $T_n = n$ si $n \leq N$, $T_n = N$ si $n > N$.

On a donc $T_n(\Omega) = [\![1\,, \mathrm{Min}(n, N)]\!]$.

2. T_1 : on lance une boule, qui va occuper une case ! $T_1 = 1$, variable aéatoire certaine.

T_2 : on lance deux boules, qui vont occuper une ou deux cases. $T_1 = 1$ ssi la deuxième boule tombe dans la même case que la première, donc $\mathrm{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$, et $\mathrm{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N}$.

3. $(T_n = 1)$: les deuxième, troisième, …, n-ème boule vont tomber dans la même case que la première boule ! Probabilité $\mathrm{P}(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$

$(T_n = 2)$: Glurps, une question qui demande de la culture, ou bien assez de clairvoyance pour laisser tomber, et surtout ne pas donner un résultat « au hasard ». Commençons par déterminer $\mathrm{P}(T_n \leq 2)$:

$\mathrm{P}(T_n \leq 2) = \binom{N}{2}\left(\frac{2}{N}\right)^n$

Explication : il y a $\binom{N}{2}$ manières de choisir les deux cases parmi N dans lesquelles vont tomber les n boules. Chacune de ces n boules a la probabilité $\frac{2}{N}$ de tomber dans une des dites cases. On obtient ainsi la probabilité que toutes les boules soient dans deux cases *au maximum*, c'est à dire $\mathrm{P}(T_n \leq 2)$. On continue en écrivant

$\mathrm{P}(T_n = 2) = \mathrm{P}(T_n \leq 2) - \mathrm{P}(T_n = 1) = \binom{N}{2}\left(\frac{2}{N}\right)^n - \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$. Après simplification on trouve

$$\mathrm{P}(T_n = 2) = (N-1)\left(\frac{2}{N}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

Avec $N = 2$, cela donne $\mathrm{P}(T_n = 2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, cohérent avec le résultat $\mathrm{P}(T_n = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$(T_n = n)$: $\mathrm{P}(T_n = n) = 0$ si $n > N$. Si $n \leq N$, on divise le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles :

$$P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n}$$

4. On utilise la formule avec le système complet d'événements $(T_n = i)_{1 \leq i \leq n}$ (en glissant pudiquement sur le fait que le sce en question n'en est pas vraiment un si $n > N$, certains des événements étant alors de probabilité nulle…)

$$\mathrm{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{(T_n = i)}(T_{n+1} = k)\mathrm{P}(T_n = i)$$

$\mathrm{P}_{(T_n = k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$ car, sachant que k cases sont non vides au n-ème lancer, il en sera de même au $(n+1)$-ème lancer ssi la $(n+1)$-ème boule arrive dans une des k cases non vides.

$\mathrm{P}_{(T_n = k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$ car, sachant que $k-1$ cases sont non vides au n-ème lancer, il y aura une cases non vide supplémentaire ssi au $(n+1)$-ème la $(n+1)$-ème boule arrive dans une des $N-(k-1) = N-k+1$ cases vides.

Les autres probabilités conditionnelles sont nulles, d'où le résultat.

5. a. $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$ car $T_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.

b. $G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(T_n = k)kx^{k-1}$; $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(T_n = k) = \mathrm{E}(T_n)$

c. On utilise les propriétés connues du signe Σ : ($\sum(xa_k + yb_k) = x\sum a_k + y\sum b_k$)

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(T_{n+1} = k)x^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathrm{P}(T_n = k)x^k + \frac{N}{N}\sum_{k=1}^{n+1} P(T_n = k-1)x^k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\mathrm{P}(T_n = k-1)x^k$$

$$= \frac{1}{N} x \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(T_n = k)x^{k-1} + x \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n = k-1)x^{k-1} - \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\mathrm{P}(T_n = k-1)x^{k-2}$$

Dans la première somme, on a tenu compte du fait que T_n est à valeurs dans $[\![1\,,n]\!]$. Dans la deuxième et la troisième somme, on effectue le changement d'indice $i = k - 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} xG_n'(x) + x \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_n = i)x^i - \frac{x^2}{N} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(T_n = i)ix^{i-1}$$

$$= \frac{1}{N} xG_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N} G_n'(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$$

d. Tiens, si on dérivait ?

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1 - 2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x - x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$$

Avec $x = 1$, on obtient :

$$G_{n+1}'(1) = \frac{1}{N}(-1)G_n'(x) + \frac{1}{N}(1 - 1)G_n''(1) + G_n(1) + G_n'(1)$$

D'où le résultat, compte tenu de $G_n(1) = 1\,, G_n'(1) = \mathrm{E}(T_n)$.

e. Le plus beau est pour la fin. On va établir le résultat par récurrence. La propriété est vraie pour $n = 1$, car T_1 est la variable aléatoire certaine 1, donc $\mathrm{E}(T_1) = 1$, alors que $N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^1\right] = 1$!

Supposons la propriété vraie pour n fixé dans $\mathbf{N}^*$, alors d'après le résultat précédent :

$$\mathrm{E}(T_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right) + 1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N}\right) N - N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1} + 1$$

$$= N - 1 - N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1} + 1$$

$$= N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right)$$

La propriété est vraie pour $n + 1$.
Elle est donc établie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Le troisième jeu est certainement le plus amusant, mais pas le jour du concours ! Bah, il y avait de quoi se distraire par ailleurs…