edhec 2007 corrigé rapide

exercice 1

1) a) Pour tout M dans **M₂(R)**, $\varphi(M)$ appartient à **M₂(R)**.
Pour tout M, M' dans **M₂(R)**, et tout x dans **R**,
$\varphi(M+M') = M + M' + {}^t(M+M') = M + {}^tM + M' + {}^tM' = \varphi(M) + \varphi(M')$;
$\varphi(xM) = xM + {}^t(xM) = x(M + {}^tM) = x\varphi(M)$.
Donc φ est une endomorphisme de **M₂(R)**.
b) $\varphi(E_1) = 2E_1$; $\varphi(E_2) = E_2 + E_3$; $\varphi(E_3) = E_2 + E_3$; $\varphi(E_4) = 2E_4$, donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) A est symétrique, donc φ est diagonalisable. Deux vecteurs-colonne de A sont colinéaires, donc φ n'est pas bijectif.
2) $A^2 = 2A$, donc, par récurrencee, pour tout n de **N**, $A^n = 2^{n-1}A$.
3) a) Les 4 vecteurs colonnes de A forment une famille génératrice de $\operatorname{Im}\varphi$, donc
$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$. Or cette famille est libre, car
$xE_1 + y(E_2 + E_3) + z\,E_4 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.
C'est donc une base de $\operatorname{Im}\varphi$, qui est donc de dimension 3.
b) D'après la formule du rang, $\ker\varphi$ est de dimension 1 (car **M₂(R)** est de dimension 4). Une base de $\ker\varphi$ est constituée de n'importe quelle matrice non nulle appartenant à $\ker\varphi$, par exemple $E_2 - E_3$.
c) Le plus simple est de déterminer l'ensemble des solutions à l'équation $(\varphi - 2\mathrm{Id})(u) = 0$.
En utilisant la matrice A, et en notant x, y, z, t les coordonnées de u dans la base (E_1, E_2, E_3, E_4), on trouve comme ensemble de solutions (x, y, y, t), ce qui signifie que 2 est valeur propre de A, avec comme sous-espace propre associé l'ensemble des $xE_1 + y(E_2 + E_3) + zE_4$, avec x, y, t appartenant à **R**. Donc le sous-espace propre pour la valeur 2 est bien $\operatorname{Im}\varphi$.
Une question qui demandait de bien comprendre le mécanisme de la représentation d'un endomorphisme par une matrice…
d) L'énoncé parle de « donner » les éléments propres de A, il a bien raison. On a les valeurs propres 0, avec le sep associé $\operatorname{Vect}(E_1 - E_2)$, et 2, avec le sep associé $\operatorname{Vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$. Existe-t-il d'autres valeurs propres ? Non, car on a « fait le plein » (la somme des dimensions des sep est égale à 4), mais c'est difficile à justifier rigoureusement avec les moyens du programme…

exercice 2

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$; $\mathrm{P}(U = 1) = \mathrm{P}(U = -1) = \frac{1}{2}$; U et X indépendantes ; $Y = UX$.
1) a) Le sce à utiliser est $(U = -1\,;U = 1)$:
$\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(Y \leq x \cap U = 1) + \mathrm{P}(Y \leq x \cap U = -1)$
Mais : $Y \leq x$ et $U = 1 \Leftrightarrow UX \leq x$ et $U = 1 \Leftrightarrow X \leq x$ et $U = 1$, et
$Y \leq x$ et $U = -1 \Leftrightarrow UX \leq x$ et $U = -1 \Leftrightarrow X \geq -x$ et $U = -1$.
D'où la conclusion.
b) U et X sont indépendantes, donc
$\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(U = 1)\mathrm{P}(Y \leq x) + \mathrm{P}(U = -1)\mathrm{P}(X \geq -x)$
Désignons par Φ la fr de la loi normale centrée réduite.
$\mathrm{P}(X \geq -x) = 1 - \mathrm{P}(X \leq -x) = 1 - \Phi(-x) = 1 - [1 - \Phi(x)] = \Phi(x)$

Par conséquent la f.r de Y est donnée par

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(x) = \Phi(x)$$

Y et X suivent la même loi, la loi normale centrée réduite.

2) a) Pour traiter cette question et quelques unes des suivantes, il faut avoir présent à l'esprit la propriété suivante : Si X et Y sont indépendantes, alors toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y. Propriété intuitivement évidente, au programme ,mais qu'on n'a pas très souvent l'occasion d'utiliser…

$\mathrm{E}(U) = 0$; $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X^2U) = \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(U) = 0$

b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 - 0 \times \mathrm{E}(Y) = 0$

3) a) $\mathrm{E}(X^2) = 1$ (car $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{V}(X) = 1 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$), donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1 \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \ ; \ \int_{0}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

cette dernière égalité car l'intégrande est impaire.

b) On choisit $u = x^3$; $v' = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; $u' = 3x^2$; $v = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. u et v sont de classe C^1 sur **R**.

c) On passe à la limite $A \to +\infty$, en utilisant la définition d'une intégrale convergente du type $\int^{+\infty}$, le seul problème étant en $+\infty$.

d) $\mathrm{E}(X^4) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\int_{0}^{+\infty} x^4 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\frac{3}{2}\sqrt{2\pi} = 3$$

Amusant !

4) a) $\mathrm{E}(X^2Y^2) = \mathrm{E}(X^4U^2) = \mathrm{E}(X^4)\mathrm{E}(U^2)$ (X^4 et U^2 sont indépendantes car X et U le sont.)

$\mathrm{E}(X^4) = 3$ et $\mathrm{E}(U^2) = 1$, donc $\mathrm{E}(X^2Y^2) = 3$.

b) $\mathrm{Cov}(X^2, Y^2) = \mathrm{E}(X^2Y^2) - \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2) = 3 - 1 \times 1 = 2$

c) $\mathrm{Cov}(X^2, Y^2) \neq 0$, donc X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Si X et Y étaient indépendantes , alors X^2 et Y^2 le seraient. Donc elles ne le sont pas !

d) Pour que deux v.a soient indépendantes, il ne suffit pas que leur covariance soit nulle.

exercice 3

1) a) On peut étudier la fonction $g(x) = x - \ln x$, ou on peut évoquer la concavité de la fonction ln pour dire que pour tout $x > 0$, on a $\ln x \leq x - 1 < x$.

b) ? La fonction semble définie sur [0 ; +∞[, et il parait difficile de l'étendre aux valeurs négatives de la variable…

2) a) f est continue sur]0 ; +∞[en tant que quotient de deux fonctions continues avec le dénominateur qui ne s'annule pas. En 0, $f(x)$ est équivalent à $\frac{-\ln x}{\ln x} = -1 = f(0)$, donc f est continue en 0. f est donc continue sur D.

b) $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x - \ln x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc $f'_d(0) = 0$.

3) a) f est dérivable sur]0 ; +∞[, car c'est le quotient de deux fonctions dérivables avec le dénominateur qui ne s'annule pas. On trouve

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$$

b) En $+\infty$, $f(x)$ est équivalent à $\frac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0 quand x te,nd vers $+\infty$, donc
$\lim_{+\infty} f = 0$

c) $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}$, on obtient le tableau de variations :

x	0 e $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	-1 ↗ $1/\mathrm{e}$ ↘ 0

4) Sur]e ; $+\infty$[, $f > 0$; sur [0 ; e], f est strictement croissante, et $f(1) = 0$. Donc f est négative sur [0 ; 1[, positive sur]1 ; e] (il n'est pas nécessaire d'évoquer le théorème le bijection monotone). En résumé :

x	0 1 $+\infty$
$f(x)$	$-$ 0 $+$

5) a) f est continue sur D, donc l'intégrale $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ existe, égale à $\Phi(x) - \Phi(0)$, avec Φ primitive de f sur D. Par conséquent, F est de classe C^1 sur D, et $F' = f$ sur D. On déduit alors du 4) que F est strictement décroissante sur [0 ;1], strictement croissante sur [1 ; $+\infty$[.

b) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \to +\infty$

c) Pour tout $x \geq 1$,

c) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t}\mathrm{d}t \geq \int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t,$

car, pour tout $t \geq 1, \ln t \geq 0$ et $0 < t - \ln t \leq t$, et donc $\dfrac{\ln t}{t - \ln t} \geq \dfrac{\ln t}{t}$.

Par conséquent la limite de F en $+\infty$ est $+\infty$.

Problème

1)
```
program edhec_2007 ;
  Var z, hasard : integer ;
  Begin
   Randomize ; z:=0 ;
   Repeat z ≔ z+1 ; hasard ≔ random(2); until (hasard=1);
   Writeln(z);
  End.
```

b) `writeln(random(z)+1);`

2) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*, 0 \leq \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$, et la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1\,;1[$), donc la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ est convergente.

3) Z suit la loi géométrique de paramètre 1/2 (temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves identiques et indépendantes, la probabilité du succès à chaque épreuve étant 1/2).

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad ; \quad \mathrm{V}(X) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

4) Si $i > k$, la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i)$ est égale à 0. Si $0 \leq i \leq k$:

$$\mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i) = \frac{1}{k}$$

b) On utilise la formule des probabilités totales avec le sce $(Z = k), k \in$ **N* :**

$$\mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i)\mathrm{P}(Z = k) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

c) En effectuant tout de suite l'interversion des signes Σ admise et indiquée :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$$
$$= 1$$

5) a) Pour tout entier naturel i non nul :

$$i\mathrm{P}(X = i) = i\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} i\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \leq \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Pour calculer cette dernière somme, le mieux est peut-être de l'expliciter, pour s'apercevoir qu'on peut mettre $\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$ en facteur. On obtient

$$i\mathrm{P}(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i} 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

b) On a $0 \leq i\mathrm{P}(X \leq i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, et la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ est convergente, donc la série de terme général $i\mathrm{P}(X = i)$ est (absolument) convergente, donc X admet une espérance.

c) Toujours en effectuant de suite l'interversion :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} i\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

6) a) $0 \leq i^2\mathrm{P}(X = i) = i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$, terme général d'une série convergente (série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2} \in]-1\,;1[$), donc …

b) Comment on ferait sans cette interversion ??

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} i^2\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\sum_{i=1}^{k} i^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

c) En développant les deux expressions et en identifiant, on trouve :

$$(k+1)(2k+1) = 2k(k-1) + 5k + 1$$

c) $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(2k(k-1)+5k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$= \frac{1}{6}\left[2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{5}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 1\right] = \frac{19}{6}$

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{19}{6} - \frac{9}{4} = \frac{11}{12}$

7) L'inégalité de Bienaymé-Chebychev dans sa généralité est :

$\forall \varepsilon > 0, \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$

Dans le cas qui nous intéresse, cela donne :

$\forall \varepsilon > 0, \mathrm{P}\left(\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{11}{12\varepsilon^2}$

Pour obtenir le $\frac{11}{27}$, on doit prendre $\varepsilon^2 = \frac{27}{12}$, donc $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Par conséquent, B.T nous donne

$\mathrm{P}\left(\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) \leq \frac{11}{27}$

Ce qui nous donne la réponse car

$\left|X - \frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow X - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$ ou $X - \frac{3}{2} \leq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow X \geq 3$ ou $X \leq 0$

et car X est à valeurs positives.

8) a) Tiens, bizarre.

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

b) Quel est l'angle d'attaque ? Ben, certainement l'intégration de l'égalité précédente sur l'intervalle $[0\,;\frac{1}{2}]$. Essayons :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\mathrm{d}x = [-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x$$

Ça marche !

c) Pour encadrer l'intégrale, on encadre la fonction à intégrer : de $0 \leq x \leq 1/2$ on tire :

$$-x \geq -\frac{1}{2}\ ;\ 1-x \geq \frac{1}{2}\ ;\ x^n \geq 0\ ;\ 0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{x^n}{\frac{1}{2}} = 2x^n\ ;$$

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^n \mathrm{d}x = \left[2\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Par encadrement, on en déduit : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x = 0.$

d) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln 2$

en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité du b).

$\mathrm{P}(X=2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$

e) $\mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(X=1) - \mathrm{P}(X=2) = 1 - \ln 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

$\mathrm{P}(X \geq 3)$ est donc voisin de $1{,}5 - 2 \times 0{,}7 = 0{,}1$.

Le majorant de $\mathrm{P}(X \geq 3)$ trouvé à la septième question (11/27) est donc assez médiocre… Ce qui est normal, puisqu'il est obtenu sans tenir compte de la loi de X. On obtiendrait le même résultat avec n'importe quelle v.a ayant même espérance et même variance que X.

Comme d'habitude c'est beaucoup trop long, mais il y a de quoi s'exprimer, et même de quoi choisir ! Le concepteur il me semble a veillé à ce que le candidat soit bien guidé et ne soit pas bloqué de façon rédhibitoire si il ne trouve pas la réponse à une question au début d'un exercice.