# edhec 2008 option économique corrigé rapide

## exercice 1

$f_n(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx$

**1) a)** Tous calculs fait on trouve :

$$f_n'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + n \quad ; \quad f_n''(x) = -\frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$$

**b)** $1-\mathrm{e}^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ , $f_n''(x)$ est donc négative sur $]-\infty\,,0[$ , positive sur $]0\,,+\infty[$ , $f_n'(x)$ est donc décroissante sur $]-\infty\,,0[$ , croissante sur $]0\,,+\infty[$ ; comme $f_n'(0) = n - \frac{1}{2} > 0$, il en résulte que $f_n{}'$ est positive sur **R**, et donc $f_n$ est strictement croissante sur **R**.

**2) a)** Les limites ne posent aucun problème (mais on rédige vu la formulation de l'énoncé) :

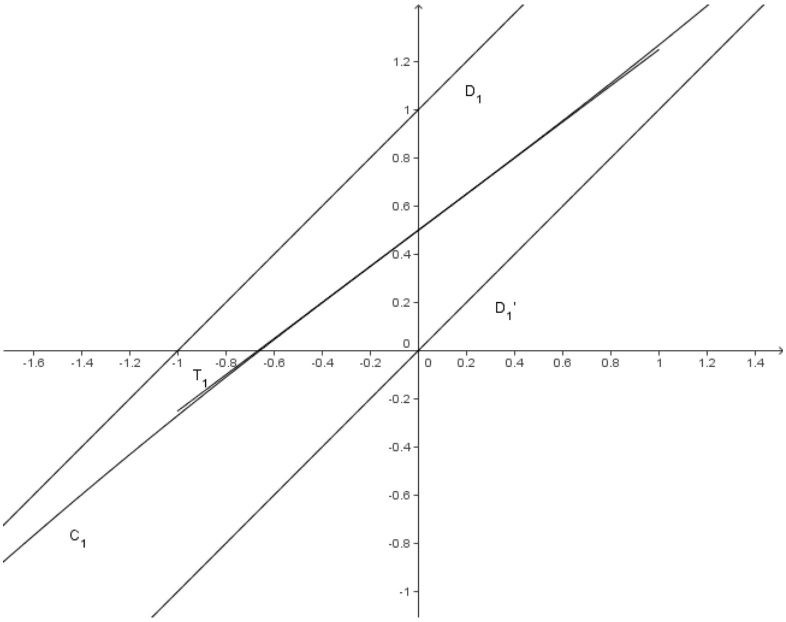
$$\lim_{+\infty} f_n = +\infty \quad ; \quad \lim_{-\infty} f_n = -\infty$$

**b)** $f_n(x) - nx = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ , donc $(D_n)$ est asymptote à $(C_n)$.

$f_n(x) - (nx+1) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - 1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ , donc $(D_n{}')$ est asymptote à $(C_n)$.

**c)** On connaît le signe de $f_n''(x)$, qui s'annule en changeant de signe uniquement en 0. Le seul point d'inflexion est donc le point $A_n\left(0\,,\frac{1}{2}\right)$.

**d)** $(T_1)$ a pour équation $y - f(0) = f'(0)(x-0)$, soit, tous calculs faits : $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.




**3) a)** $f_n$ est continue strictement croissante sur **R**. $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$ ; $\lim_{-\infty} f_n = -\infty$. Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet pour unique solution $u_n$ sur **R**.

**b)** $f_n(0) = n - \frac{1}{2} > 0$ ; $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} < 0$ ; $f_n$ est strictement croissante sur **R**.

Donc $-\frac{1}{n} < u_n < 0$.

**c)** Par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ .

**d)** La définition de $u_n$, c'est $f_n(u_n) = 0$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{u_n}} + nu_n = 0 \quad ; \quad nu_n = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$$

car $(u_n)$ converge vers 0. Il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty}(-2nu_n) = 1 \;;\; \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = 1 \;;\; u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}\,.$$

## exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

**1) a)** Une question qui serait plus agréable à traiter avec une calculatrice… On trouve, plus exactement on fait semblant de trouver : $A(A-2I)^2 = 0$, car on connaît son cours !
Le polynôme $P(x) = x(x-2)^2$ est donc un polynôme annulateur pour la matrice $A$. Les racines de ce polynôme sont 0 et 2. Les seules valeurs propres possibles de $A$, et de $f$, sont donc 0 et 2.
**b)** $f(u) = 0$ , $f(v) = 2v$. Comme $u$ et $v$ sont non nuls, il en résulte que 0 et 2 sont effectivement valeurs propres de $f$. Les valeurs propres de $f$ sont donc 0 et 2.
**2) a)** Sans problème, $xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$. $(u, v, w)$ est donc une famille libre, et comme $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3, on obtient que $(u, v, w)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
**b)** $f(w) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 11 \\ 2 & 6 & 5 \\ -4 & -8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(w) = v + 2w$ .
$f(u) = 0$ , $f(v) = 2v$ , $f(w) = v + 2w$ , donc par définition de la matrice associée à $f$ dans la base $(u, v, w)$, on obtient la matrice $T$ indiquée.
**c)** $f$ est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous espaces propres associés à $f$ est égale à 3. En déterminant ces sous espaces propres ( c'est-à-dire en résolvant $AX = 0$, puis $(A-2I)X = 0$ ), on trouve respectivement $\mathrm{Vect}(u)$ , $\mathrm{Vect}(v)$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de $f$ est égale à 2, donc $f$ n'est pas diagonalisable.
**3) a)** $N^2 = 0$; il en résulte, pour tout $k \geq 2$ : $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0$.
$T$ et $N$ commutent : $TN = NT = 0$. La formule du binôme permet alors d'écrire :

$$T^n = (D+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k = D^n + nD^{n-1}N$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

**c)** D'après la théorie du changement de base :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la méthode du pivot fournit :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(À vérifier ! La moindre erreur rendrait invalide la suite des calculs…)
**d)** Le RPR canal historique.
**e)** Le plus palpitant pour la fin :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3.2^n & 3.2^{n+1} + 3n.2^n - 2^{n+2} & 2^{n+2} + 3n.2^{n-1} \\ 2^n & 2^{n+1} + n.2^n & 2^{n+1} + n2^{n-1} \\ -2^{n+1} & -2^{n+2} + (1-n)2^{n+1} & -2^{n+2} + (1-n)2^n \end{pmatrix}$$

Ça marche pour $n = 1$, on va dire que c'est ça….

## exercice 3

**1)** la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et , pour $t > 0$ :

$$\int_0^t \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^t = -\frac{1}{1+t} + 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est donc convergente, et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1$.
**2) a)** pour tout $x \in \mathbf{R}$ :
$f(-x) = \frac{1}{2(1+|-x|)^2} = \frac{1}{2(1+|x|)^2} = f(x)$ .Donc $f$ est paire.

**b)** $f$ est paire, donc, sous réserve de convergence : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Or

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

est une intégrale convergente, de valeur $\frac{1}{2}$, d'après la question précédente. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est donc convergente, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Comme, d'autre part, $f$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, on peut en conclure que $f$ est une densité de probabilité.

**3) a)** Pour toute valeur prise par $X$, $1+|X| \geq 1$, donc $Y = \ln(1+|X|) \geq 0$. Donc $Y(\Omega) = [0\,,+\infty[$. (En toute rigueur, on a seulement montré l'inclusion de $Y(\Omega)$ dans $[0\,,+\infty[$, mais cela suffit pour la suite.)

**b)** $Y(\Omega) = [0\,,+\infty[$, donc $G(x) = 0$ si $x < 0$.Si $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(\ln(1+|X|) \leq x) = \mathrm{P}(1+|X| \leq \mathrm{e}^x) = \mathrm{P}(|X| \leq \mathrm{e}^x - 1) \\ &= \mathrm{P}(1-\mathrm{e}^x \leq X \leq \mathrm{e}^x - 1) = F(\mathrm{e}^x - 1) - F(1-\mathrm{e}^x) \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$G(x) = \begin{cases} F(\mathrm{e}^x - 1) - F(1-\mathrm{e}^x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**c)** $G$ est dérivable sur $]-\infty\,,0[$ et sur $]0\,,+\infty[$. Si $x < 0$, alors $G'(x) = 0$, et si $x > 0$, alors on a

$$G'(x) = \mathrm{e}^x F'(\mathrm{e}^x - 1) - (-e^x)\mathrm{F}'(1-e^x) = e^x f(\mathrm{e}^x - 1) + \mathrm{e}^x f(1-\mathrm{e}^x) = 2\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x - 1)$$

car $f$ est paire.

$Y$ admet donc bien la fonction proposée par l'énoncé comme densité.

**d)** Il reste à déterminer cette densité. Pour $x < 0, g(x) = 0$, et pour $x \geq 0$ :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x - 1) = 2\mathrm{e}^x \frac{1}{2(1+\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-x}$$

Y suit donc la loi exponentielle de paramètre 1.

## problème

### partie 1

**1) a)** $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[0\,,1]$, donc $f'$ est continue sur $[0\,,1]$, donc $f'$ est bornée sur $[0\,,1]$, donc il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $f' \leq M$ sur $[0\,,1]$. (Une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée. Plus précisément, l'image d'un segment (= intervalle fermé borné) par une fonction continue est un segment. Ce théorème au programme trouve son utilisation ici.)

On a alors, d'après la formule des accroissements finis :

pour tout couple $(x\,,y)$ de $[0\,,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

**b)** Avec $x = t \geq \frac{k}{n}$ et $y = \frac{k}{n}$, appartenant à $[0\,,1]$, on obtient alors le résultat :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,, \forall k \in [\![0\,,n-1]\!], \forall t \in \left[\frac{k}{n}\,,\frac{k+1}{n}\right]\,, \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left|t - \frac{k}{n}\right| = M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$

**c)** La manipulation conjointe des intégrales et des valeurs absolues posent de délicats problèmes (on ne peut pas intégrer directement l'inégalité précédente). Il faut écrire :

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}t\right|$$

et, sachant que (avec $a < b$) $\left|\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\mathrm{d}t$, on peut continuer :

$$\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} M\left(t - \frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{M\left(t - \frac{k}{n}\right)^2}{2}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$$

On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*\,, \forall k \in [\![0\,,n-1]\!], \left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

**d)** Ce n'est pas fini :

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}$$

**e)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{2n} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

**2) a)** On effectue une intégration par parties avec

$u = (1-x)^q\ , v' = x^p\ , u' = -q(1-x)^{q-1}, v = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$

$u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0\ ,1]$.

**b)** À partir de ceci on obtient de proche en proche :

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1) = \frac{q}{p+1}\frac{q-1}{p+2}I(p+2,q-2) = \cdots$$

$$\ldots = \frac{q(q-1)\ldots(q-(q-1))}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}I(p+q,0) = \frac{q!}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}I(p+q,0)$$

$$= \frac{p!\,q!}{p!\,(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}I(p+q,0) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$$

**c)** $I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$, d'où le résultat :

$$\forall (p,q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}, I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

**3)**

```
function i(p,q :integer) :real;
begin
if q=0 then i:=1/(p+1) else i:=i(p+1,q-1);
end;
```

**partie 2**

**1)** Avec $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, on a $\mathrm{E}(Y) = mp$.

$\mathrm{E}\big(Y(Y-1)\big) = \mathrm{E}(Y^2 - Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)$.

$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)^2$ , donc $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{V}(Y) + \mathrm{E}(Y)^2$, donc

$\mathrm{E}\big(Y(Y-1)\big) = \mathrm{V}(Y) + \mathrm{E}(Y)^2 - \mathrm{E}(Y) = mp(1-p) + m^2p^2 - mp = mp(1-p+mp-1)$

$\qquad = mp\big(p(m-1)\big) = m(m-1)p^2$.

**2)** En recopiant la définition de la loi de $X_n$, avec $n = 1$, on obtient :

La loi de $X_1$ conditionnellement à l'événement $(U_1 = 0)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m,0)$.

$(U_1 = 0)$ est l'événement certain, et la loi binomiale $\mathcal{B}(m,0)$ est la loi de la variable certaine 0 (en répétant $m$ fois une épreuve où la probabilité de succès est 0, il est sûr que l'on va obtenir 0 succès !). Tout compte fait, $U_1$ est la variable certaine égale à 0…

**3) a)** Un et un seul des événements $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)$ se produit, et dans chaque cas, la loi conditionnelle de $X_n$ sachant $U_n = \frac{k}{n}$ prend ses valeurs dans $[\![0\ ,m\ ]\!]$. Il en est donc de même pour $X_n$ : $X_n(\Omega) = [\![0\ ,m]\!]$.

On utilise alors la formule des probabilités totales avec le sce $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)_{0\leq k\leq n-1}$ :

$$\forall i\in[\![0\ ,m]\!]\ , \mathrm{P}(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}_{\left(U_n=\frac{k}{n}\right)}(X_n = i)\mathrm{P}\left(U_n = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^i\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

**b)** Avec $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m\,,\frac{k}{n}\right)$, on a

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{i=0}^{m} i\mathrm{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m\frac{k}{n}$$

L'espérance de $X_n$ est alors :

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{m} i\mathrm{P}(X_n = i) = \sum_{i=1}^{m} i\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\, m\frac{k}{n} = \frac{m}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{m}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{m(n-1)}{2n}$$

**c)** Avec $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m\,,\frac{k}{n}\right)$, on a

$$\mathrm{E}(Y(Y-1)) = \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\mathrm{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = m(m-1)\frac{k^2}{n^2}$$

L'espérance de $X_n(X_n - 1)$ est alors :

$$\mathrm{E}(X_n(X_n-1)) = \sum_{i=0}^{m} i(i-1)\mathrm{P}(X_n = i) = \sum_{i=1}^{m} i(i-1)\frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\, m(m-1)\frac{k^2}{n^2} = \frac{m(m-1)}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \frac{m(m-1)}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

**d)** Il suffit alors d'écrire :

$$\mathrm{V}(X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - [\mathrm{E}(X_n)]^2 = \mathrm{E}\big(X_n(X_n-1)\big) + \mathrm{E}(X_n) - [E(X_n)]^2$$

et achever les calculs pour obtenir le résultat…

**4) a)** C'est magique. Pour tout $i \in [\![0\,,m\,]\!]$,

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \binom{m}{i}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \binom{m}{i}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

d'après la première question du préliminaire, avec $f(x) = x^i(1-x)^{m-i}$. D'après la deuxième question du préliminaire, on alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = i) = \binom{m}{i} I(i, m-i) = \binom{m}{i}\frac{i!\,(m-i)!}{i+m-i+1} = \frac{m!}{i!\,(m-i)!}\frac{i!\,(m-i)!}{m+1} = \frac{1}{m+1}$$

**b)** Ce résultat signifie exactement que la suite $(X_n)$ converge en loi vers $X$ qui suit la loi uniforme sur $[\![0\,,m\,]\!]$. Il y a le compte, cet ensemble comporte bien $m+1$ éléments !

**c)** Est connue des candidats uniquement la variance d'une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Qu'à cela ne tienne ! $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,m]\!])$, donc $X+1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,m+1]\!])$, et

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(X+1) = \frac{(m+1)^2-1}{12} = \frac{m(m+2)}{12}$$

$$\mathrm{E}(X_n) = \frac{m(n-1)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{m}{2} = \mathrm{E}(X)\ ;\ \mathrm{V}(X_n) = \frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{m(m+2)}{12} = \mathrm{V}(X)$$

Les trois exercices sont raisonnables, le problème me semble beaucoup trop ambitieux « pour l'option concernée » (et même pour les scientifiques, on peut se poser des questions…)