Corrigé rapide EDHEC 2009

Exercice 1 :

1°) Sur $]-\infty,1[$ $(1-x)>0$ donc $\ln(1-x)$ est de classe C^∞ et ne s'annule qu'en 0 donc par produit et quotient de ces fonctions usuelles f est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$ donc continue. En 0 : $\ln(1-x)\sim x$ donc en 0 : $f(x)\sim\dfrac{-x}{-x(1-x)}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ce qui prouve la continuité de f en 0.

2°) a) Au voisinage de 0 : $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$ donc $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ avec $u=-x$.

2°) b) Pour cela on étudie le quotient : $q(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2}$; on va donner le DL à l'ordre2 du numérateur en utilisant celui de $\ln(1-x)$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 2 : $q(x)=\dfrac{-x-\left(-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2}=\dfrac{1}{2}+o(1)\to\dfrac{1}{2}$ en 0, donc f dérivable en 0 et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

3°) a) Cf 1°) ; $f'(x)=-\dfrac{[\ln(1-x)+x]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$ pour $x\neq 0$ du signe opposé à celui de $u(x)=\ln(1-x)+x$!

3°) b) Une étude rapide prouve que u admet un maximum en 0 qui vaut $u(0)=0$ donc u est strictement négative sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$; donc f est strictement croissante sur $]-\infty,1[$ (en remarquant que $f'(0)>0$ aussi !)

3°) c) En $-\infty$: $f(x)\sim\dfrac{-x}{(-x)\ln(1-x)}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$; $(1-x)\ln(1-x)=y\ln y$ avec $y\to 0^+$on en déduit : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln(y)=-\infty$.

4°) a) D'après ce qui précède f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,1[$ donc réalise une bijection de $]-\infty,1[$ sur $]0,+\infty[$ or tout entier naturel non nul n est dans $]0,+\infty[$ donc possède un unique antécédent u_n dans $]-\infty,1[$; de plus $f(0)=1\leq n$ donc $u_n\in[0,1[$ et $u_1=0$.

4°) b) $f(u_n)=n\Leftrightarrow u_n=f^{-1}(n)$ avec f^{-1} bijection réciproque de f donc croissante aussi ; on en déduit que la suite (u_n) est croissante, majorée par 1 donc convergente vers une limite $L=\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n)=1$.

Exercice 2 :

1°) a) $P(Z>k)=P(X>k\cap Y>k)=P(X>k)P(Y>k)=[P(X>k)]^2$par indépendance des variables X et Y et car elles suivent la même loi et ce pour tout entier k strictement positif.

Or $P(X>k)=\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty}p(1-p)^{j-1}=p(1-p)^k\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i=p(1-p)^k\frac{1}{1-(1-p)}=(1-p)^k$.

1°) b) $(Z>k-1)=(Z>k)\cup(Z=k)$ donc $P(Z>k-1)$
$=P(Z>k)+P(Z=k)$ par incompatibilité, CQFD.

1°) c) On en déduit : $P(Z=k)=[(1-p)^{k-1}]^2-[(1-p)^k]^2=[(1-p)^2]^{k-1}[1-(1-p)^2]$ ce qui est bien une loi géométrique de paramètre $(1-p)^2 = q^2$.

2°) a) Si $X(\omega)$ est pair alors $X(\omega) = 2k$ et $T(\omega) = k$; si $X(\omega)$ est impair alors $X(\omega) = 2k-1$ et $T(\omega) = k$, où k désigne un entier strictement positif, donc dans les deux cas $T(\omega)$ est un entier strictement positif.

2°) b) En reprenant les calculs précédents pour tout entier $k > 0$: $T(\omega) = k \Leftrightarrow X(\omega) = 2k$ ou bien $X(\omega) = 2k-1$ donc T prend bien toutes les valeurs entières strictement positives.

2°) c) Re-belote ! $(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k-1)$ donc, par incompatibilité de ces deux événements on a :

$\mathrm{P}(T = k) = P(X = 2k) + P(\mathrm{X} = 2k-1) = p(1-p)^{2k-2}(2-\mathrm{p})$ en remplaçant !

Enfin on vérifie : $[1-(1-p)^2] = 2p - p^2 = p(2-p)$ d'où la même loi que celle de Z.

3°) repeat lancer:=random; *x*:=*x*+1; until (lancer<=*p*) ; {on arrête les lancers dès le premier « succès » }

if (*x*mod2=0) then *t* :=*x/2* else *t :=(x+1)/2 ;* {car si *x* est pair *t* vaut *x/2* et *t* vaut (*x+1)/2* sinon !}

writeln(*t*) ; { affiche la valeur de *t*}

Exercice 3 : pour alléger les notations je désigne par A une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Donc $\mathrm{E}(A) = 1/\lambda$ et $\mathrm{V}(A) = 1/\lambda^2$

1°) a) Sous réserve de convergence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \lambda \mathrm{E}(A) = 1.$

1°) b) On vérifie aisément que h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, positive sur $\mathbb{R}$ et son intégrale vaut 1(1°) a)).

1°) c) Sous réserve de convergence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xh(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \mathrm{E}(A^2) = \lambda[\mathrm{V}(A) + \mathrm{E}(A)^2]$ donc

cette intégrale converge et vaut : $\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2}\right) = \dfrac{2}{\lambda}$. Puis : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xh(x)dx = \frac{2}{\lambda}.$

2°) Par définition d'une fonction de répartition on a toujours : $0 \leq F(x) \leq 1$ donc $1 - F(x) \geq 0$. Reste à prouver que l'inégalité est stricte donc que $F(x) \neq 1$. Or pour tout $x > 0$ F est **strictement croissante** donc pour tout $x > 0$ $F(x) < \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, d'où le résultat demandé car par ailleurs $F(x) = 0$ si ≤ 0.

3°) a) Si $x < 0$ $g(x) = 0$ donc g est positive ; si $x \geq 0$, $f(x) > 0$ et $0 < 1 - F(x) \leq 1$ donc $\ln[1 - \mathrm{F(x)}] \leq 0$ donc g est bien positive.

3°) b) Sur $]0,+\infty[$ $1 - F$ étant continue et strictement positive, $\ln(1-F)$ est continue et par produit avec f continue g est aussi continue ; sur $]-\infty, 0[$ g est nulle donc continue, d'où le résultat.

3°) c) $\displaystyle\int_0^c g(x)\mathrm{d}x = \int_0^c -f(x)\ln[1-F(x)]\mathrm{d}x = [(1-F(x)\ln(1-F(x))]_0^c + \int_0^c (1-F(x)) * \frac{f(x)}{1-F(x)}\,\mathrm{d}x$

on fait l'IPP proposée en posant $v(x) = \ln(1-F(x))$ avec $v'(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$ car $F' = f$ et en remarquant que u

et v sont bien de classe 1 sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$. Si on fait tendre c vers $+\infty$ le crochet tend vers 0 (car de la forme $y\ln y$ quand y tend vers 0) et il reste $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ car est une densité de probabilité. CQFD !!!

3°) d) Découle directement de ce qui précède car *g(x)* est nul si $x < 0$.

3°) e) Une densité de probabilité de Y est f définie par : $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ donc f vérifie les conditions du 2°) ; sa fonction de répartition est définie par : $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ donc la fonction g est définie par : $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $g(x) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \ln\left(1 - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$ si $x \geq 0$ soit enfin : $-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}(-\lambda x) = -\lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x}$ donc pour x tout réel : $g(x) = h(x)$ donc Z a la même loi que X.

<u>Problème :</u> Partie I.

1°) La linéarité de f découle de la linéarité des fonctions « dérivée » et « dérivée » seconde ». Pour « endo » si P est de degré au plus 2 alors P' est de degré au plus 1 et P'' de degré au plus 0 (constant !), ce qui prouve que *f(P)* est un polynôme de degré au plus 2.

2°) On établit facilement que : $f(e_0) = 6e_0, f(e_1) = -5e_0 + 6e_1$ et $f(e_3) = 2e_0 - 10e_1 + 6e_3$ d'où la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3°) a) A est triangulaire sans « 0 » sur sa diagonale donc elle est inversible donc f est bijectif.

3°) b) La matrice de f^{-1} est A^{-1} et grâce au calcul classique on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{19}{108} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

4°) a) La seule valeur propre possible est 6 (seul terme diagonale de la matrice triangulaire) ; si A était diagonalisable on aurait une matrice P telle que : $A = P^{-1}(6I)P = 6I$ ce qui est faux ! donc A non diagonalisable.

4°) b) En résolvant l'équation : $AX=6X$ on trouve $E_6 = \mathrm{Vect}(e_0)$.

Partie II.

1°) Pour la linéarité cf Partie I. 1°), pour « endo » si u est de classe C^∞ alors u' et u'' le sont aussi donc par combinaison linéaire *g(u)* est aussi de classe C^∞.

2°) a) $u \in \mathrm{Ker}(g - 6id) \Leftrightarrow g(u) = 6u \Leftrightarrow u'' - 5u' + 6u = 6u \Leftrightarrow u'' - 5u' = 0$ or en dérivant un produit : $j'(x) = [u''(x) - 5u'(x)]\mathrm{e}^{-5x} = 0$ ce qui prouve que j est constante.

2°) b) D'après a) SI $u \in \mathrm{Ker}(g - 6id)$ ALORS $j(x) = c$ DONC $u'^{(x)} = c\mathrm{e}^{5x}$ DONC $u'^{(x)} = \frac{c}{5}\mathrm{e}^{5x} + d, d$ réel. On en déduit donc que u est combinaison linéaire des fonctions u_1 et u_2. Pour terminer le raisonnement il FAUT vérifier que ces fonctions u_1 et u_2 sont bien dans $\mathrm{Ker}(g - 6id)$ (vérification sans difficulté). On peut alors en conclure que $\mathrm{Ker}(g - 6id) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

3°) a) $u \in \mathrm{Ker}g \Leftrightarrow g(u) = 0 \Leftrightarrow u'' - 5u' + 6u = 0$ donc $v' = u'' - 2u' = 5u' - 6u - 2u' = 3u' - 6u = 3v$.

3°) b) En dérivant h on obtient : $h'(x) = [v'(x) - 3v(x)]\mathrm{e}^{-3x} = 0$ donc h est bien constante.

3°) c) D'après a) on peut écrire : $h(x) = \alpha$ α réel, donc $v(x) = \alpha\mathrm{e}^{3x}$.

4°) a) $w' = u'' - 3u' = 5u' - 6u - 3u' = 2u' - 6u = 2u$.

4°) b) et c) On procède exactement comme aux 3°) b) et c).

5°) a) D'après 3°) et 4°) :

SI $u \in \mathrm{Ker}g$ ALORS $v(x) = \alpha\mathrm{e}^{3x}$ ET $w(x) = \beta\mathrm{e}^{2x}$ DONC $u'(x) - 2u(x) = \alpha\mathrm{e}^{3x}$ ET $u'(x) - 3u(x) = \beta\mathrm{e}^{2x}$ par différence on en déduit que : $u(x) = \alpha\mathrm{e}^{3x} - \beta\mathrm{e}^{2x}$. On vient de prouver que SI $u \in \mathrm{Ker}g$ ALORS u est combinaison

linéaire des fonctions u_3 et u_4 ; il reste à prouver que ces deux fonctions sont bien dans Ker$g$ ce qui se vérifie aisément. Conclusion : $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.

5°) b) On vient de trouver une famille génératrice de Ker$g$, reste à prouver que cette famille est libre et on aura une base de Ker$g$ qui sera donc de dimension 2. Cherchons deux réels a et b tels que $au_3 + bu_3 = 0$. Ce qui se traduit par : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ a\mathrm{e}^{3x} + b\mathrm{e}^{2x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}(a\mathrm{e}^{x} + b) = 0 \Leftrightarrow (a\mathrm{e}^{x} + b) = 0$ par exemple on peut prendre $x = 0$ puis

x=ln2 ce qui donne :$a + b = 0$ et $2a + b = 0$ donc $a = b = 0$; ce qui prouve que la famille est libre !