eml 2007 corrigé rapide

exercice 1

1. A est symétrique réelle, donc diagonalisable.
2. • S'agit-il de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A ? On commence alors par effectuer sur la matrice $A-\lambda I$ les opérations élémentaires
$L_1 \leftrightarrow L_2$; $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 + \lambda L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.
On obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda^2 & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}+\lambda & -\lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

* On peut remarquer que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A, puisque la matrice comporte alors une ligne de zéros. On détermine alors le sous-espace propre correspondant (dont une équation est $x+y+z=0$), puis on reprend, avec $\lambda \neq -\frac{1}{2}$, en explicitant le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-\lambda y+\frac{1}{2}z = 0 \\ \left(\frac{1}{4}-\lambda^2\right)y+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda\right)z = 0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x-\lambda y+\frac{1}{2}z = 0 \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda-\lambda^2\right)z = 0 \\ y=z \end{cases}$$

(On peut en effet diviser la troisième équation par $\frac{1}{2}+\lambda$ qui est non nul.) Le système obtenu admet une solution non nulle ssi $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda-\lambda^2=0$, ssi $\lambda=1$ ou $\lambda=-\frac{1}{2}$.
La deuxième valeur propre est donc $\lambda=1$, le sous-espace propre correspondant est la droite vectorielle engendrée par (1, 1, 1).
* On peut aussi poursuivre les opérations élémentaires, en effectuant :
$L_2 \leftrightarrow L_3$; $L_3 \leftarrow L_3 - (\frac{1}{2}-\lambda)L_2$
On obtient alors la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}+\lambda & -\lambda-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Et on obtient bien sûr les mêmes éléments propres.
* On peut effectuer l'opération $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} + L_2$, ce qui fournit une matrice échelonnée, (mais non triangulaire), et poursuivre la résolution… On peut aussi travailler sur le système explicité, ce qui permet de changer l'ordre des inconnues x, y, z…
• Mais s'agit-il bien des déterminer les éléments propres de A ? En précisant qu'elle est symétrique, l'énoncé nous fournit en fait 8 des 9 coefficients de la matrice de passage P, la « matrice des vecteurs propres » :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

On peut donc avoir l'idée de calculer
$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,
et résoudre $P\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}$… On trouve $\lambda=-\frac{1}{2}$ et $z=-1$.
On montre ainsi qu'en prenant

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\quad;\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

on a $A=PDP^{-1}$. En effet les calculs précédents montre que A possède 2 valeurs propres, 1 et $-\frac{1}{2}$, que la somme des dimensions des sous-espaces propres correspondants est égale à 3, donc que A est diagonalisable, et la théorie du changement de base fournit le résultat. (En fait, pour être tout à fait rigoureux, il faudrait montrer que la matrice P est inversible, dire qu'elle est constituée de trois vecteurs-colonnes propres de A, donc que A est diagonalisable…)

• Bref, une question bien difficile, et inutilement : la diagonalisation de la matrice $B=2A$ se fait bien plus aisée, et on embraye sur la question 3 en écrivant $A=\frac{1}{2}B$… Et c'est dommage pour ceux qui n'ont pas traité cette question, pour le reste de l'exercice il faudra se contenter des ramasser quelques miettes…
La méthode du pivot aboutit à

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

3. Après avoir établi (par exemple par récurrence) $A^n=PD^nP^{-1}$, on obtient

$$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

4. a Le raisonnement par récurrence habituel, soigneusement rédigé.
b On en déduit

$$u_n=\frac{1}{3}\left\{\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u_0+\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]v_0+\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]w_0\right\}$$
$$=\frac{1}{3}(u_0+v_0+w_0)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(2u_0-v_0-w_0)$$

$u_0+v_0+w_0=1$, et est-ce que $\frac{1}{3}(2u_0-v_0-w_0)=u_0-\frac{1}{3}$? Oui ! car c'est équivalent à :

$$\frac{2}{3}u_0-\frac{1}{3}v_0-\frac{1}{3}w_0=u_0-\frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3}u_0-\frac{1}{3}v_0-\frac{1}{3}w_0=-\frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

Les calculs sont semblables avec v_0 et w_0, d'où la conclusion.
c. $-1<-\frac{1}{2}<1$, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$, donc $u=v=w=\frac{1}{3}$.

d. Le genre de question sur laquelle il ne faut pas trop s'attarder….

$$d_n = \sqrt{\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\left|u_0 - \frac{1}{3}\right| + \left|v_0 - \frac{1}{3}\right| + \left|w_0 - \frac{1}{3}\right|\right)$$

En effet, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|$: élever au carré les deux membres de l'inégalité pour s'en convaincre.

$u_0,\ v_0, w_0$sont *positifs*, en utilisant l'inégalité triangulaire ($|a \pm b| \leq |a| + |b|$), on obtient alors

$$\left|u_0 - \frac{1}{3}\right| + \left|v_0 - \frac{1}{3}\right| + \left|w_0 - \frac{1}{3}\right| \leq u_0 + \frac{1}{3} + v_0 + \frac{1}{3} + w_0 + \frac{1}{3} = 2$$

Et la conclusion en résulte…

e. D'après la question précédente, pour obtenir $d_n \leq 10^{-2}$, il suffit de prendre n tel que

$\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-2}$; $2^{n-1} \geq 100$;

$n = 8$ convient (car $2^7 = 128$).

Fort heureusement les deux autres exercices s'avèrent bien plus raisonnables…

exercice 2

préliminaire

1. g est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ car g est la somme de deux fonctions continues sur $]0\,;\,+\infty[$.

g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ car sa dérivée, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$, est positive (ou en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes).Les limites de g ne posent aucun problème (mais on détaille soigneusement la rédaction) : $\lim_{+\infty} g = +\infty$; $\lim_0 g = -\infty$.

2. g est continue et srictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, $\lim_{+\infty} g = +\infty$; $\lim_0 g = -\infty$, donc g réalise une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur **R**. $0 \in$ **R**, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;\,+\infty[$.

3. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2 < 0{,}25 - 0{,}69 < 0$; $g(1) = 1 > 0$; g est strictement croissante, donc

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

partie A

1.a. Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} = \frac{-2x^2 + 4x - 1}{4x}$$

$f'(x)$ est du signe du numérateur, qui est un polynôme du second degré dont les racines sont $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mais $I \subset \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 + 4x - 1$, soit positif (« du signe de $-a$ à l'intérieur des racines »), sur I, et f est donc strictement croissante sur I.

b. $f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{4} = \frac{-1+4\ln 2}{4} > 0$ car $4\ln 2 > 4 \times 0{,}69 > 1$; donc $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right)$.

f est strictement croissante sur I, donc $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$.

$f(1) - 1 = -\frac{1}{4} < 0$, donc $f(1) < 1$. On a bien

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$$

c. Pour tout $x \in I$, $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1)$ car f est croissante sur I, donc $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ d'après la question précédente, donc $\forall x \in I, f(x) \in I$.

2. a. $u_1 = \frac{3}{4}$!
b. Par récurrence, en utilisant 1.c.
c. $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in I$; f est croissante sur I, donc (u_n) est monotone. $u_1 = \frac{3}{4} < 1 = u_0$, donc (u_n) est décroissante.
d. (u_n) est décroisante et minorée par $\frac{1}{2}$, elle donc convergente. Sa limite ℓ est un point fixe de f appartenant à I, car f est continue sur I. Or

$$f(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$\alpha \in I$, c'es bon :la limite de (u_n) est donc le réel α.
partie B
1.a. F est une somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, donc g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.

$$p = \mathrm{e}^y + \frac{y}{x} \quad ; \quad q = x\mathrm{e}^y + \ln x$$

b. Le système $p = q = 0$ est équivalent successivement à :

$$\mathrm{e}^y = -\frac{y}{x} \quad \text{et} \quad x\frac{-y}{x} + \ln x = 0$$

$$\mathrm{e}^y = -\frac{y}{x} \quad \text{et} \quad y = \ln x$$

$$x = -\frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad y = \ln x$$

$$x^2 + \ln x = 0 \quad \text{et} \quad y = \ln x$$

$$x = \alpha \text{ (car } x > 0) \quad \text{et} \quad y = \ln \alpha$$

F admet donc un seul point critique , le point $(\alpha\,; \ln \alpha)$.
2. F est classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ (somme de fonctions de classe C^2), et

$$r = -\frac{y}{x^2} \quad ; \quad s = \mathrm{e}^y + \frac{1}{x} \quad ; \quad t = x\mathrm{e}^y$$

Au point critique on a

$$r = -\ln\frac{\alpha}{\alpha^2} \; ; \quad s = \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad ; \quad t = \alpha^2 \quad rt - s^2 = -\ln \alpha - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2$$

Or $g(\alpha) = \alpha^2 + \ln \alpha = 0$, donc $-\ln \alpha = \alpha^2$, et donc

$$rt - s^2 = \alpha^2 - \left(\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) = -2 - \alpha^2 < 0$$

F n'admet donc pas d'extremum local sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$: c'est triste !

exercice 3

1. f est ≥ 0, continue sur $\mathbf{R}^*$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}[-\mathrm{e}^{-x}]_0^t = \lim_{t\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-t} + 1) = 1$$

Donc f est une densité de probabilité (en fait, la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre 1…).
2. a. Pour $n = 0$:

$$\mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{P}(X < 1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-0}$$

Pour $n \geq 1$:

$$\mathrm{P}(Y = n) = \mathrm{P}(n \leq X < n + 1) = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_n^{n+1} = -e^{-n-1} + e^{-n}$$

$$\mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}$$

b. Y est à valeurs dans **N**, donc $Y+1$ est à valeurs dans **N***, et pour tout $n \in$ **N*** :

$$\mathrm{P}(Y+1=n)=\mathrm{P}(Y=n-1)=\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-(n-1)}=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

Donc $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.
Par conséquent

$$\mathrm{E}(Y+1)=\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \quad ; \quad \mathrm{V}(Y+1)=\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}=\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$$

Et en utilisant les formules $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$; $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$:

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}-1=\frac{1}{\mathrm{e}-1} \quad ; \quad \mathrm{V}(Y)=\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$$

c. Le plus simple est d'utiliser la question précédente, qui montre que Y est le nombre d'échecs qui précède le premier succès lors d'épreuves identiques et indépendantes, la probabilité du succès à chaque épreuve étant $1-\frac{1}{\mathrm{e}}$. On sait comment simuler une telle épreuve à l'aide de la fonction random : random < = 1 − 1/e . En effet , random retourne un nombre au hasard entre 0 et 1, en suivant la loi uniforme, et la probabilié que ce nombre soit inférieur ou égal à 1 −1/e est égal à… 1 – 1/e. Je propose donc la rédaction suivante :

```
program eml2007;
var y:integer; u:real;
begin
     randomize;
     u:=random;y:=0;
     while random > 1 – exp(-1) do
     y:= y+1;
     writeln('y vaut ',y);
end.
```

Et le `u :=random` du texte n'est là que pour faire joli – ou orienter la réponse ? ou alors je n'ai pas compris ce qu'avait en tête le concepteur…

3.a. U et Y sont indépendantes, donc $2U-1$ et Y sont indépendantes. U et Y admettent des espérances, donc T admet une espérance, et

$$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}[(2U-1)Y]=\mathrm{E}(2U-1)\mathrm{E}(Y)=[2\mathrm{E}(U)-1]\mathrm{E}(Y)=\left[2\times\frac{1}{2}-1\right]\frac{1}{\mathrm{e}-1}=0$$

b. Si $U=1$, alors $2U-1=1, T=Y, T^2=Y^2$;
si $U=0$, alors $2U-1=-1, T=-Y, T^2=Y^2$.
Donc $T^2=Y^2$. Donc
$\mathrm{V}(T)=\mathrm{E}(T^2)-[\mathrm{E}(T)]^2=\mathrm{E}(Y^2)-0.$
Mais $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-[\mathrm{E}(Y)]^2$, donc

$$\mathrm{V}(T)=\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+[\mathrm{E}(Y)]^2=\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}+\frac{1}{(\mathrm{e}-1)^2}=\frac{\mathrm{e}+1}{(\mathrm{e}-1)^2}$$

c. Remarquons d'abord que $2U-1$ sui la loi uniforme sur $\{-1 ; 1\}$.
Si $n > 0$, $(T=n)=(2U-1=1)\cap(Y=n)$, donc par indépendance :

$$\mathrm{P}(T=n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-n}$$

Si $n < 0$, $(T=n)=(2U-1=-1)\cap(Y=-n)$, donc par indépendance :

$$\mathrm{P}(T=n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{n}$$

Et avec $n=0$, on a $(T=0)=(Y=0)$, donc

$$\mathrm{P}(T=0)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

4.a En fait, Y est la partie entière de X : c'est clair si $X \geq 1$, et c'est vrai aussi si $0 \leq X < 1$. Quant à l'événement $X < 0$, il ne compte pas (il est de probabilité nulle !). Par conséquent, $D = X - Y$ prend ses valeurs dans [0 ; 1[, et donc $F_D(t) = 0$ si $t < 0$, $F_D(t) = 1$ si $t \geq 1$.
b. Avec $t \in [0\,;1[$, $(D \leq t) = (X - Y \leq t) = (Y \leq X \leq Y + t)$ car $X \geq n$ quand $Y = n$. Donc

$$(D \leq t) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (n \leq X \leq n + t)$$

c. Avec $t \in [0\,;1[$ et $n \in \mathbf{N}$ fixés :

$$\mathrm{P}(n \leq X \leq n + t) = \int_n^{n+t} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_n^{n+t} = -\mathrm{e}^{-n-t} + \mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{-n}(1 - \mathrm{e}^{-t})$$

d. Du b et du c, et de la σ-additivité de la probabilité, on déduit :

$$F_D(t) = \mathrm{P}(\mathrm{D} \leq \mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty} e^{-\mathrm{n}}(1 - e^{-\mathrm{t}}) = (1 - \mathrm{e}^{-t}) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{n}}$$

$$= (1 - \mathrm{e}^{-t}) \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$$

e. En récapitulant les résultats, on a donc

$$F_D(t) = 0 \text{ si } t < 0 \;\; ; \;\; F_D(t) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} \text{ si } 0 \leq t < 1 \;\; ; \;\; F_D(t) = 1 \text{ si } \mathrm{t} \geq 1$$

F_D est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]1\,;+\infty[$ (fonction constante), sur]0 ; 1[(quotient de deux fonctions continues avec le dénominateur qui ne s'annule pas). F_D est continue en 0 et en 1 (les limites à droite et à gauche sont égales à $F_D(0), F_D(1)$). donc F_D est continue sur **R**.
F_D est de classe C^1 sur $\mathbf{R}\backslash\{0\,;1\}$.
Donc F_D est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité f_D de D sera obtenue pas dérivation de F_D sur $\mathbf{R}\backslash\{0\,;1\}$, et en prolongeant de manière arbitraire en 0 et 1. On obtient donc par exemple :

$$f_D(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} \text{ si } t \in [0\,;1] \;\; ; f_D(t) = 0 \text{ sinon}$$

Evidemment la résolution de cette question (et de la question 2) est plus facile si on a étudié attentivement l'exercice 1 edhec 2002…