eml 2008 corrigé rapide

exercice 1

Partie I

$f(t) = t\ln t - t$ si $t > 0$; $f(0) = 0$

1. f est continue sur $]0\,;\,+\infty[$, comme somme de deux fonctions continues, et en 0, car :
$\lim_{t\to 0} t\ln t = 0$, donc $\lim_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$.
Donc f est continue sur $[0;\,+\infty[$.

2. f est de classe C^1 sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions de classe C^1, et, pout tout $t > 0$:
$f'(t) = \ln t$

3. $f(t) = t(\ln t - 1)$, donc $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

4.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

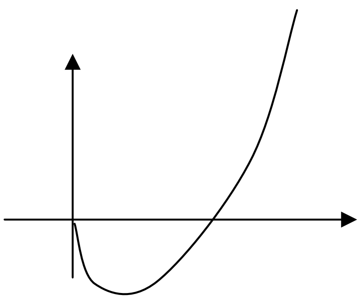
5. f est de classe C^2 sur $]0 : +\infty[$, et, pour tout $t > 0$, $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$. Donc f est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

6. a. $\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \ln t - 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, donc Γ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

b. $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t\ln t - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t(\ln t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \mathrm{e}$
Les points d'intersction de Γ avec l'axe des abscisses sont donc les points d'abscisse 0 et e.

c. $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ et $\frac{f(t)}{t} = \ln t - 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc Γ admet une branche parabolique de direction l'axe désordonné !

d.



(À peu près, hein…)
Le retour aux fondamentaux…

Partie II

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \quad , \quad x > 1$$

1. D'après la définiton de l'intégrale, on a

$$G(x) = \frac{1}{2}[F(x+1) - F(x-1)]$$

avec F primitive de f sur $]1\,;\,+\infty[$. F est de classe C^2 sur $]1\,;\,+\infty[$ car $F' = f$ est de classe C^1 sur cette intervalle, et il en est donc de même pour G. De plus on a

$$G'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big) \quad ; \quad G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

2. a. La fonction ln est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$, donc G'' est positive sur $]1\,;\,+\infty[$, donc G' est strictemente croissante sur $]1\,;\,+\infty[$;

b. $G'(2) = \frac{1}{2}\big(f(3) - f(1)\big) > 0$ car f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. G' est continue strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$;
$\lim_1 G' = \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 2) = \ln 2 - 1 < 0$; $G'(2) > 0$;
Donc l'équation $G'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1\,;\,+\infty[$, et $\alpha < 2$.

partie III

$\phi(x,y) = \big(y - f(x+1)\big)^2 - \big(y - f(x-1)\big)^2 \quad , \quad (x,y) \in]1\,;\,+\infty[^2$

1. Φ est une somme de fonctions de classe C^2 sur $]1\,;\,+\infty[^2$, elle est donc de classe C^2 sur $]1\,;\,+\infty[^2$. On obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = -2[\ln(x+1)\ \big(y - f(x+1) + \ln(x-1)\ \big(y - f(x-1)\big)\big]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 2\big(2y - f(x+1) - f(x-1)\big)$$

2. $G'(\alpha) = 0$, donc $f(\alpha+1) - f(\alpha-1) = 0$. Au point $\big(\alpha, f(\alpha+1)\big)$, on a donc

$p = -2\big[\ln(\alpha+1)\ \big(f(\alpha+1) - f(\alpha+1)\big) + \ln(\alpha-1)\ \big(f(\alpha+1) - f(\alpha-1)\big)\big] = 0$

$q = 2\big(2f(\alpha+1) - f(\alpha-1)\big) = 0$

Donc $\big(\alpha, f(\alpha+1)\big)$ est un point critique de Φ.

3. On réfléchit avant de se lancer dans le calcul de $rt - s^2$…

$\Phi\big(\alpha, f(\alpha+1)\big) = \big(f(\alpha+1) - f(\alpha+1)\big)^2 + \big(f(\alpha+1) - f(\alpha-1)\big)^2 = 0$

Or, pour tout $(x,y) \in]1\,;\,+\infty[^2, \Phi(x,y) \geq 0$. Φ admet donc un extremum local – et même global ! – en $\big(\alpha, f(\alpha+1)\big)$…

Exercice 2

Partie I

1. On cherche $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ tels que $(A - \lambda I)X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Sur la matrice $A - \lambda I$, les opérations élémentaires

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \quad ; \quad L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1 \quad ; \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

aboutissent à la réduite de Gauss

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont donc 0, -1 et 1 et pour les sous-espaces propres associés, on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \quad &: \quad \mathrm{Vect}\big((-1,1,0)\big) \\ \lambda = -1 \quad &: \quad \mathrm{Vect}\big((-1,1,1)\big) \\ \lambda = 1 \quad &: \quad \mathrm{Vect}\big((0,1,-1)\big) \end{aligned}$$

(Prendre le temps de *vérifier* ces résultats…)

2. A est diagonalisable car elle possède trois valeurs propres distinctes. La théorie du changement de base fournit alors, compte tenu des contraintes de l'énoncé :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot fournit alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Là aussi on vérifie...)

3. La matrice

$$C = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est effectivement diagonale !

Partie II

1. E est de dimension $3^2 = 9$.

2. • Pout tout M de E, $f(M) = AM - MB$ appatient à E.

• Pour tout M, M' de E et tout x de **R**, on a

$f(M + M') = A(M + M') - (M + M')B = AM - MB + AM' - M'B = f(M) + f(M')$

$f(xM) = A(xM) - (xM)B = x(AM - MB) = xf(M)$

Donc f est un endomorphisme de E.

3.a. $M \in E$; $N = P^{-1}MP$, donc $M = PNP^{-1}$. On a aussi $A = PDP^{-1}$, $B = PCP^{-1}$.

$M \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(M) = 0 \Leftrightarrow AM - MB = 0$

$\Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} - PNP^{-1}PCP^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow PDNP^{-1} - PNCP^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow P(DN - NC)P^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow DN - NC = 0 \Leftrightarrow DN = NC$

b. En notant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, on obtient

$$DN = NC \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a' & -b' & -c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ a' & 0 & -c' \\ a'' & 0 & -c'' \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow a = 0 , -c = 0 , -a' = a', -b' = 0 , b'' = 0 , c'' = -c''$

$\Leftrightarrow a = c = a' = b' = b'' = c'' = 0$

$$\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c' \\ a'' & 0 & 0 \end{pmatrix} = a''E_{3,1} + bE_{1,2} + c'E_{2,3}$$

en notant $E_{i,j}$ la matrice de E dont tous les termes sont nuls sauf celui en i-ème ligne et j-ème colonnne qui est égale à 1. (La famille $\left(E_{i,j}\right)_{1\le i,j\le 3}$ est la base canonique de E.)

L'ensemble des matrices N telles que $DN = NC$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $E_{3,1}, E_{1,2}, E_{2,3}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de E, de famille génératrice $(E_{3,1}, E_{1,2}, E_{2,3})$. Or cette famille est libre, car

$a''E_{3,1} + bE_{1,2} + c'E_{2,3} = 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow a'' = b = c' = 0$

Ils'agit d'une donc d'une base du sous-espace vectoriel en question, qui est donc de dimension 3.

4. a. D'après 3.a, $M \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow M = PNP^{-1}$ avec N tels que $N = xE_{3,1} + yE_{1,2} + zE_{2,3}$. Donc

$M \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow M = P\left(xE_{3,1} + yE_{1,2} + zE_{2,3}\right)P^{-1} = xPE_{3,1}P^{-1} + yPE_{1,2}P^{-1} + zPE_{2,3}P^{-1}$

$\Leftrightarrow M = xE'_{3,1} + yE'_{1,2} + zE'_{2,3}$

avec x, y, z éléménts de **R**. $(E'_{3,1}, E'_{1,2}, E'_{2,3})$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Or cette famille est libre, car $xE'_{3,1} + yE'_{1,2} + zE'_{2,3} = 0 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$.

$(E'_{3,1}, E'_{1,2}, E'_{2,3})$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$, qui est donc de dimension 3.

D'après la formule du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

$\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 9 – 3 = 6.

b. Pas la peine de chercher bien loin : $PE_{3,1}P^{-1}$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ et est non nul (sinon $E_{3,1}$ le serait).

$f\left(E_{1,1}\right) = AE_{1,1} - E_{1,1}B$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$ et est non nul, comme on s'en persuade en faisant le calcul…

Exercice 3

Partie I

$h(x) = \dfrac{x}{2-x}$, $x \in [0\,,1]$.

1. a. h est continue et strictement croissante (car $h'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$ sur $[0,1]$). $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$, donc h est une bijection de $[0\,,1]$ sur $[0\,,1]$.

Pour tout y de $[0\,,1]$:

$h(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{2-x} = y \Leftrightarrow x = y(2-x) \Leftrightarrow x(1+y) = 2y \Leftrightarrow x = \dfrac{2y}{1+y}$. Donc :

$$h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}$$

b.

$\alpha + \dfrac{\beta}{2-x} = \dfrac{\alpha(2-x)+\beta}{2-x} = \dfrac{-\alpha x + 2\alpha + \beta}{2-x} = \dfrac{x}{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 1 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$; donc

$$h(x) = -1 + \frac{2}{2-x}$$

c.

$$\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{2-x}\right)\mathrm{d}x = [-x - 2\ln(2-x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

2. a. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0\,,1]$ a pour espérance $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$ et pour variance $\mathrm{V}(X) = \frac{1}{12}$ (à retouver au besoin en calculant $\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, puis $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$).

b. X prend ses valeurs dans $[0\,,1]$, donc $\frac{X}{2-X} = h(X)$ aussi, et, pour tout y dans $[0\,,1]$:

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X}{2-X} \le y\right) = \mathrm{P}(h(X) \le y) = \mathrm{P}\big(X \le h^{-1}(y)\big)$

car h est une bijection strictement croissante de $[0\,,1]$ sur $[0\,,1]$. La fonction de répatition de X est connue, et on a

$$\mathrm{P}\left(\frac{X}{2-X} \le y\right) = h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y}$$

c. $Y = \frac{X}{2-X}$ prend ses valeurs dans $[0\,,1]$, donc, en notant F_Y sa fonction de répartition, on a

$$F_Y(y) = 0 \text{ si } y < 0 \ ; \ F_Y(y) = 1 \text{ si } y > 1 \ ; \ F_Y(y) = \frac{2y}{1+y} \text{ si } y \in [0\,,1]$$

F_Y est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}\setminus \{0\,,\,1\}$, donc Y est une variable aléatoire à densité. On obtient une densité g de Y en dérivant F_Y sur $\mathbf{R}\setminus \{0\,,\,1\}$, et en prolongeant cette dérivée de façon arbitraire en 0 et en 1, on a donc par exemple

$$g(y) = \frac{2}{(1+y)^2} \text{ si } y \in [0\,,1] \ ; g(y) = 0 \text{ sinon}$$

d. Y prend ses valeurs dans $[0\,,1]$, donc $\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 yg(y)\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \frac{y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$. Pour calculer cette intégrale, on peut faire une intégration par parties, avec $u = y\,, v' = \frac{1}{(1+y)^2}\,, u' = 1\,, v = -\frac{1}{1+y}$. Ou bien on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{(1+y)-1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^2}\right)\mathrm{d}y$$

Avec les deux méthodes, on trouve finalement $\mathrm{E}(Y) = 2\ln 2 - 1$, soit la valeur de l'intégrale calculée en 1.c ! Est-ce dû au hasard ? Non ! En effet, $g(y) = (h^{-1})'(y)$, donc $\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y(h^{-1})'(y)\mathrm{d}y$. Or chacun sait que $(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}$. On a donc $\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y\frac{1}{h'(h^{-1}(y))}\mathrm{d}y$. On effectue le changement de variable $y = h(x)$. On a $\mathrm{d}y = h'(x)\mathrm{d}x$ et $h^{-1}(y) = x$, on obtient donc

$\mathrm{E}(Y) = \displaystyle\int_0^1 h(x)\frac{1}{h'(x)}h'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ ...

Partie II

1. a. La variable aléatoire S_t modélise le nombre d'invités qui sont arrivés avant l'instant t.

b. S_t est le nombre de succès (nombre d'arrivées avant l'instant t), lors de n épreuves identiques et indépendantes. Pour chaque épreuve la probabilité du succès est $\mathrm{P}(T_k \leq t) = t$ (ou bien : S_t est la somme de n variables de Bernoulli de même paramètre t, et indépendantes). Donc S_t suit la loi binomiale de paramètres n, t.

2. a. $(R_1 > t)$ ssi la première arrivée a lieu après l'instant t ssi il n'est arrivé aucun invité avant l'instant t ssi $(S_t = 0)$. Par conséquent $(R_1 > t) = (S_t = 0)$.

b. Donc, si $t \in [0\,,1]$, $\mathrm{P}(R_1 > t) = \mathrm{P}(S_t = 0) = (1-t)^n$. D'autre part, tous les invités arrivent entre les instants 0 et 1, donc $\mathrm{P}(R_1 > t) = 1$ si $t < 0$, $\mathrm{P}(R_1 > t) = 0$ si $t > 1$.

La variable aléatoire R_1 admet donc pour fonction de répartition F_1 telle que :

$$F_1(t) = \mathrm{P}(R_1 \leq t) = 1 - \mathrm{P}(R_1 > t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^n & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

F_1 est continue sur **R** et de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0\,,\,1\}$, donc R_1 est une variable aléatoire à densité, et on obtient une densité f_1 de R_1 en dérivant F_1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0\,,\,1\}$, puis en prolongeant cette dérivée de façon arbitraire en 0 et en 1. On obtient par exemple :

$$f_1(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0\,,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Pour $t \in [0\,,1]$, l'événement $(R_2 > t)$ est réalisé ssi la deuxième arrivée survient après l'instant t ssi il y a eu 0 ou 1 arrivée avant l'instant t, donc $(R_2 > t) = (S_t = 0) \cup (S_t = 1)$. Par incompatibilité de ces deux événements, on a $\mathrm{P}(R_2 > t) = \mathrm{P}(S_t = 0) + \mathrm{P}(S_t = 1) = (1-t)^n + nt(1-t)^{n-1}$.

Comme précédemment, il en résulte que R_2 a pour fonction de répartition la fonction F_2 telle que

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^{n-1}\big((n-1)t+1\big) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Comme précédemment il s'agit bien de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, et tous calculs faits on trouve pour densité de R_2 la fonction f_2 telle que

$$f_2(t) = \begin{cases} n(n-1)t(1-t)^{n-2} & \text{si } t \in [0\,,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$