<u>Corrigé « rapide » de l'épreuve EMLYON 2009</u>

<u>Exercice 1 :</u> Partie I

1°) a. Comme quotient de deux fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

De plus en 0 : $e^x - 1 \sim x$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ d'où la continuité de f en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

1°) b. Cf 1°) a. puis en dérivant un quotient on trouve : $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$ pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$.

1°) c. Un développement limité au voisinage de 0 s'impose : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On peut espérer que l'ordre 2 sera suffisant car le dénominateur est équivalent à x^2 au voisinage de 0.

On en déduit en développant et surtout en ne gardant que les termes de degré inférieur à 2, le résultat suivant :

$(1-x)e^x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc au voisinage de 0 et par quotient : $f'(x) \sim \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}$ d'où la limite demandée !

1°) d. D'après a. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, f'a une limite finie en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

2°) a. Comme somme et produit de fonctions usuelles *u* est dérivable et $u'(x) = -x\,e^x$ du signe de $-x$. On en déduit que *u* admet un maximum en 0 qui vaut *u*(0) = 0 donc *u* est négative sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0.

2°) b. Le calcul fait au 1°) b. prouve que *f'* est du signe de *u* sur $\mathbb{R}^*$ donc strictement négative !

2°) c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (*pas de problème* !) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (*car* $x = o(e^x)$ *en* $+\infty$).

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

2)° d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = -1$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = 0^+$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$.

Donc la droite d'équation : $y = -x$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ et la courbe est au-dessus.

Partie II

1°) Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = x$ pour laquelle on trouve une seule solution $\alpha = \ln 2$.

(*ATTENTION* : $x = 0$ *ne convient pas* !)

2°) a. Pour cela on étudie **rapidement** la fonction *g* définie par : $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$. Elle est strictement croissante sur [0 , +∞ [, vaut 0 en 0 donc elle est positive sur [0 , +∞ [. *(pour le signe de g' on utilise le fait que f est décroissante sur* [0 , +∞ [*donc que f(x)≤ 1 sur* [0 , +∞ [*et qu'enfin :* $e^x \geq x + 1$ *toujours sur* [0 , +∞ [*)*

2°) b. « Simple » vérification calculatoire avec réduction au même dénominateur

2°) c. Le calcul précédent prouve que $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de u donc positif et on sait que f' est négative strictement sur] 0 , +∞ [,d'après la Partie I, et enfin en 0 ça « marche » aussi d'où l'encadrement demandé.

2°) d. Et voilà les accroissements finis ! En préambule il faut vérifier (par récurrence !) que tous les termes de la suite (u_n) sont positifs. Puis : f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$, soient deux réels u_n et α de $[\,0\,,+\infty\,[$, et toujours sur $[\,0\,,+\infty\,[$, on a $\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$ d'après la question précédente donc on peut appliquer les inégalités des accroissements finis avec valeur absolue soit : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ c. q. f. d.

3°) Raisonnement par récurrence sans difficulté.

4°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - \alpha) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

5°) L'objectif est d'afficher l'indice *n* tel que $|u_n - \alpha|$ soit inférieur à 10^{-9} .

```
Program emlyon ;

var n : integer ; var u : real ;

Begin

n :=0 ; u:=1;
repeat
n :=n+1 ;
u:=u/(exp(u)-1);
until abs(u-ln(2))<0.000 000 001;
writeln(n);
End.
```

Partie III

1°) Notons *F* une primitive de *f* sur ℝ (elle existe car *f* est continue et elle est même de classe C² car *f* est de classe C^1) donc *G(x) = F(2x) – F(x)* est aussi de classe C² donc de classe C^1. De plus *G'(x) = 2F'(2x) – F'(x) = 2f(2x) – f(x)* et on remplace pour trouver le résultat demandé.

2°) a. Si $x \geq 0, 2x \geq x$ donc $0 \leq f(t) \leq f(x)$ $car\ \ f\ est$ décroissante et : $0 \leq \int_{\mathrm{x}}^{2x} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{\mathrm{x}}^{2x} f(x)\mathrm{d}t$ par positivité de l'intégrale d'où : $0 \leq G(x) \leq xf(x)$.
Enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0$ $\left(car\ x^2 = o(e^x)\right)$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$ car G est encadrée par deux fonctions de limite 0.

2°) b. Même raisonnement qu'au 2°) a. mais cette fois $2x \leq x$ car $x \leq 0$ donc $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$ puis :

$$\int_{\mathrm{x}}^{2x} f(2x)\mathrm{d}t \leq \int_{\mathrm{x}}^{2x} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{\mathrm{x}}^{2x} f(x)\mathrm{d}t\ il\ faut\ \boldsymbol{inverser}\ l'ordre\ car\ les\ bornes\ sont\ dans\ le\ "mauvais"\ sens.$$

On conclut tout de même que : $G(x) \leq xf(x)$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} xf(x) = -\infty$ on en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.

3°) On peut remarquer que $G'(x) = \dfrac{f(x)(3 - e^x)}{e^x + 1}$ pour $x \neq 0$ donc est du signe de $(3 - \mathrm{e}^x)$, donc on a :

x	$-\infty$	ln3	$+\infty$
G(x)	$-\infty$ ↗	G(ln3)	↘ 0

Exercice 2 : Partie I

1°) A est triangulaire avec un 0 sur sa diagonale donc pas inversible.

2°) A étant triangulaire ses valeurs propres SONT les termes diagonaux donc 0, 1 et 4 ; elle a donc 3 valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3 donc elle est diagonalisable.

3°) Là il faut faire des calculs …et résoudre les 3 équations : $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 4X$.

On trouve : $E_0 = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$ $E_1 = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ et $E_4 = \text{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ $et\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; grâce à la formule du changement de base on a bien : $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie II

1°) $M^2 = A \Leftrightarrow (PNP^{-1})^2 = (PDP^{-1}) \Leftrightarrow PN^2P^{-1} = (PDP^{-1}) \Leftrightarrow P^{-1}(PN^2P^{-1})P = P^{-1}(PDP^{-1})P \Leftrightarrow N^2 = D.$

2°) Si $N^2 = D$ alors $ND = NN^2 = N^3$ et $DN = N^2N = N^3$ d'où le résultat !

3°) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on résout $ND = DN \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = d = f = g = h = 0 \\ a\,, e\,, i \text{ quelconques} \end{cases} \Leftrightarrow N$ diagonale

4°) On recherche donc maintenant les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$; on en trouve 4 :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5°) Les matrices M et N étant équivalentes elles ont les mêmes valeurs propres or la seule matrice N ayant des valeurs propres positives est N_1 donc la matrice B cherchée est la matrice $B = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie III

1°) On pose $Q\ (\ x\ ) =\ ax^2 +\ bx\ +\ c$ et on identifie pour trouver $Q(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x$.

2°) $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = -\frac{1}{6}(PDP^{-1})^2 + \frac{7}{6}(PDP^{-1}) = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} = PN_1P^{-1} = B\ (car\ D^2 et\ D\ sont$ *diagonales et on peut repérer Q(0), Q(1) et Q(2) sur la diagonale mais on peut aussi faire le calcul !)*

3°) $BF = FB \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F = F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{6}A + \frac{7}{6}I_3\right)AF = FA\left(-\frac{1}{6}A + \frac{7}{6}I_3\right) \Leftrightarrow AF = FA$

en effet la matrice : $-\frac{1}{6}A + \frac{7}{6}I_3$ est triangulaire (car$A$ et I_3 le sont)sans 0 sur la diagonale donc inversible !

Exercice 3 : Partie I

1°) On reconnaît une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre q donc : $P(T = k) = qp^{k-1}$, $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{q}$ et $\mathrm{V}(T) = \dfrac{p}{q^2}$.

2°) En fait $U = T - 1$ donc U a une espérance et une variance et, grâce à la linéarité de l'espérance et aux propriétés de la variance on obtient : $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(T) - 1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{q}} = -\dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ et $\mathrm{V}(U) = \mathrm{V}(T) = \dfrac{p}{q^2}$.

Partie II

1°) a. L'événement $X = k$ signifie qu'on a obtenu $k - 1$ boules blanches puis une boule noire ou bien $k - 1$ boules noires puis une boule blanche donc : $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) + \mathrm{P}(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$ donc, par indépendance des tirages : $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(B_2) \dots \mathrm{P}(B_{k-1})\mathrm{P}(N_k) + \mathrm{P}(N_1)\mathrm{P}(N_2) \dots \mathrm{P}(N_{k-1})\mathrm{P}(B_k)$

soit : $\mathrm{P}(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$ avec bien sûr $k \geq 2$ car il faut au moins 2 tirages pour avoir les 2 couleurs.

1°) b. $\displaystyle\sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} P(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty}(p^{k-1}q + q^{k-1}p) = q\sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} p^{k-1} + p\sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} q^{k-1} = \frac{qp}{1-p} + \frac{pq}{1-q} = p + q = 1.$ *(toutes les séries utilisées sont des séries géométriques convergentes car p et q sont dans] 0 , 1 [)*

1°) c. Sous réserve de convergence absolue $\displaystyle\mathrm{E}(X) = \sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} kP(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty}(kp^{k-1}q + kq^{k-1}p)$

$$= q\sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p\sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} kq^{k-1} = q\left[\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right] + p\left[\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right] = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - p - q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$ *(toutes les séries utilisées sont absolument convergentes car à termes positifs et géométriques « dérivées » convergentes.)*

2°) a. L'événement $X = k$ et $Y = 1$signifie qu'on a obtenu $k - 1$ boules noires puis une boule blanche donc :

si $k = 2$ $\mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) = \mathrm{P}(N_1 \cap B_2) + \mathrm{P}((B_1 \cap N_2) = 2qp$ et si $k \geq 3$

$\mathrm{P}(X = k \cap Y = 1) = \mathrm{P}(N_1 \cap N_2 \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) = q^{k-1}p.$

2°) b. On utilise la formule des probabilités totales avec le SCE : $(X = 2, X = 3, \dots, X = k, \dots)$ donc on obtient :

$$\mathrm{P}(Y = 1) = \sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} P(\mathrm{X} = k \cap Y = 1) = \sum_{\mathrm{k}=3}^{+\infty} q^{k-1}p + 2qp) = p\sum_{\mathrm{k}=2}^{+\infty} q^{k-1} + p\,q = \frac{qp}{1-q} + pq = q + pq = q(1+p)$$

2°) c. Dans le cas général si $j \geq 2$ l'événement $(Y = j)$ ne se produit que si on a $(Y = j \cap X = j + 1)$ ce qui donne $\mathrm{P}(Y = j) = \mathrm{P}(Y = j \cap X = j + 1) = \mathrm{P}\big(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{j-1} \cap N_j\big) = p^{j-1}q.$

3°) Pour la loi de Z il suffit de reprendre la loi de Y et d'échanger p et q. On en déduit donc :

$$\text{si } i \geq 2 \ \mathrm{P}(Z = i) = q^{i-1}p \text{ et } \mathrm{P}(Z = 1) = p(1+q) \text{et } \mathrm{E}(Z) = \frac{1}{p}(1 - q + q^2)$$

4°) Si $Y = 1$ alors $Z = i$, i entier non nul quelconque et alors $X = i+1$; si $Y = j$, j entier non nul quelconque alors $Z = 1$ et $X = j+1$; dans les deux cas on a bien $YZ = X - 1$.

5°) Sous réserve d'existence Cov(Y , Z) = E(YZ) – E(Y)E(Z) = E(X - 1) –E(Y)E(Z) = E(X) – 1 – E(Y)E(Z) d'où l'existence et la valeur de cette covariance.