esc 2008 option économique corrigé rapide

exercice 1

1. (a) $A-2I=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$; $(A-2I)^3=O_3$

(b) $(A-2I)^3=O_3$, le polynôme $P(x)=(x-2)^3$ est donc un polynôme anulateur pour la matrice A ; Ce polynôme a pour unique racine 2, donc 2 est la seule valeur propre *possible* pour A. Or 2 est bien valeur propre de A, car

$(A-2I)X=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow X=y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, y\in\mathbf{R}$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 a donc pour base $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, et pour dimension 1.

2. Les opérations élémentaires successives $L_2\leftrightarrow L_1$, $L_3\leftarrow L_3-L_1$, $L_3\leftarrow L_3-L_2$ aboutissent à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix}4 & 0 & y\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -y-1\end{pmatrix}$ qui est inversible ssi tous les termes de la diagonale sont non nuls, d'où la conclusion : P_y est inversible ssi $y\neq -1$;

3. (a) $f(u_3)=u_2+2u_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2y\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3+y=4\\1+y=2y\\2=2\end{cases} \Leftrightarrow y=1$

donc $u_3=(1,1,1)$.

(b) En fait, $P=P_1$, qui est inversible, car $1\neq -1$… Il en résulte que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R^3}$, d'après la théorie du changement de base.

(c) $f(u_1)=2u_1$ car u_1 appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre 2.

$f(u_2)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, donc $f(u_2)=u_1+2u_2$.

$f(u_3)=u_2+2u_3$.

Par définition de la matrice associée à un endomorphisme dans une base, on obtient donc :

$T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2I+N$

D'après la théorie du changement de base : $A=PTP^{-1}$.

4. (a) La matrice associée à $f\circ h$ dans la base $\mathcal{B}'$ est TM', la matrice associée à $h\circ f$ est $M'T$. Par conséquent

$f\circ h=h\circ f \Leftrightarrow TM'=M'T \Leftrightarrow (2I+N)M'=M'(2I+N) \Leftrightarrow 2M'+NM'=2M'+M'N$
$\Leftrightarrow NM'=M'N$

(b) $(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}b & b' & b''\\ c & c' & c''\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a & a'\\ 0 & b & b'\\ 0 & c & c'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}b=0, b'=a, b''=a'\\ c=0, b=c', c''=b'\\ c=0, c'=0\end{cases} \Leftrightarrow M'=\begin{pmatrix}a & a' & a''\\ 0 & a & a'\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$

(c) $N^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, donc

$(\mathcal{R}) \Leftrightarrow M'=aI+a'N+a''N^2 \Leftrightarrow h=a\,id+a'(f-2\,id)+a''(f-2\,id)^2$

Donc $S=\mathrm{Vect}(id, f-2id, (f-2id)^2)$

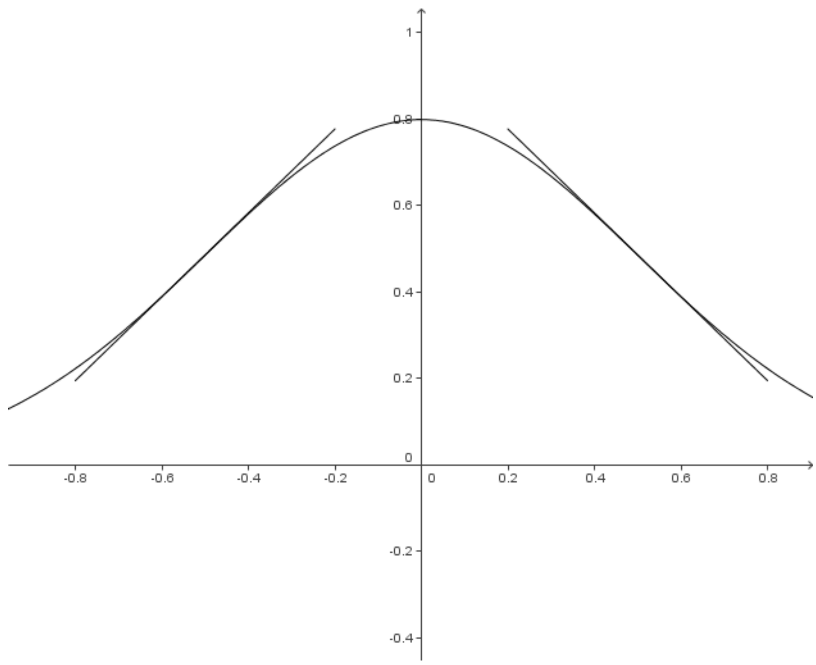
car $T=2I+N$, donc $N=T-2I$, donc N est la matrice de $f-2\,id$ dans la base $\mathcal{B}'$, et N^2 est la matrice de $(f-2\,id)^2$ dans cette même base.

(c) $aI+bN+cN^2=0 \Leftrightarrow M'=0 \Leftrightarrow a=a'=a''=0$, donc la famille (I,N,N^2) est libre. Cela se traduit en termes d'endomorphismes : la famille $(id, f-2id, (f-2id)^2)$ est libre. Comme elle est une famille génératrice de S, on peut dire que S est de dimension 3 (S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbf{R^3})$, d'ailleurs…).

Les trois éléments de la famille $\mathcal{F}'$ appartiennent à S, car ils vérifient la relation $(\mathcal{R})$, et ils forment une famille génératrice de S, car
$h \in S \Leftrightarrow h = h = a\, id + a'(f - 2\, id) + a''(f - 2\, id)^2$
$= (a - 2a' + 4a'')id + (-2a' - 4a'')f + a''f^2$
Comme S est de dimension 3, il en résulte que $(\mathcal{F}')$ est une base de S.

exercice 2

1. (a) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors Y admet pour densité la fonction f_Y telle que $f_Y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$.
avec $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{n}$, on obtient l'expression de f_n donnée.
(b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f_n(-t) = f_n(t)$, donc f_n est paire.
(c) les points d'inflexion de la courbe représentative de f_4 ont pour abscisses
$0 + \sigma = \dfrac{1}{2}\quad ; \quad 0 - \sigma = -\dfrac{1}{2}$



(C'est beau…)
(d) f_n est paire, donc sa représentation graphique est symétrique pas rapport à l'axe des ordonnées, et donc $\mathrm{P}(X_n \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)\mathrm{d}t == \int_{0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \mathrm{P}(X_n > 0)$
Et comme l'intégrale de f_n sur tout $\mathbf{R}$ vaut 1, on en conclut que $\mathrm{P}(X_n \leq 0) = \mathrm{P}(X_n > 0) = \frac{1}{2}$.

2. (a) Même principe que la question précédente : la densité φ de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, donc $\Phi(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. La relation de Chasles permet alors d'écrire, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t$.
(b) φ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$, donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et $\Phi'(x) = \varphi(x) = f_1(x)$…
(c) De façon générale, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{Y-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Ici, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, donc
$\frac{X_n - 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On obtient donc :

$$\mathrm{P}\left(0 \leq X_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\big(0 \leq \sqrt{n}X_n \leq 1\big) = \Phi(1) - \Phi(0) \approx 0{,}3$$

car $\Phi(1) \approx 0{,}8$ et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

3. (a) En fait il n'y a aucune forme indéterminée :

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \Phi(x) = \dfrac{1}{2}$; donc $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} H(x) = 0$

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \Phi(x) = \dfrac{1}{2}$; donc $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} H(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$; donc $\lim\limits_{x \to -\infty} H(x) = 0$

(b) H est le produit de deux fonctions de classe C^1 sur **R**, donc H est de classe C^1 sur **R**.
$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} H(x) = 0$ et $H(0) = 0$, donc H est continue à droite en 0.

(c) Pour tout $x > 0$, et pour tout $x < 0$ d'ailleurs, on a

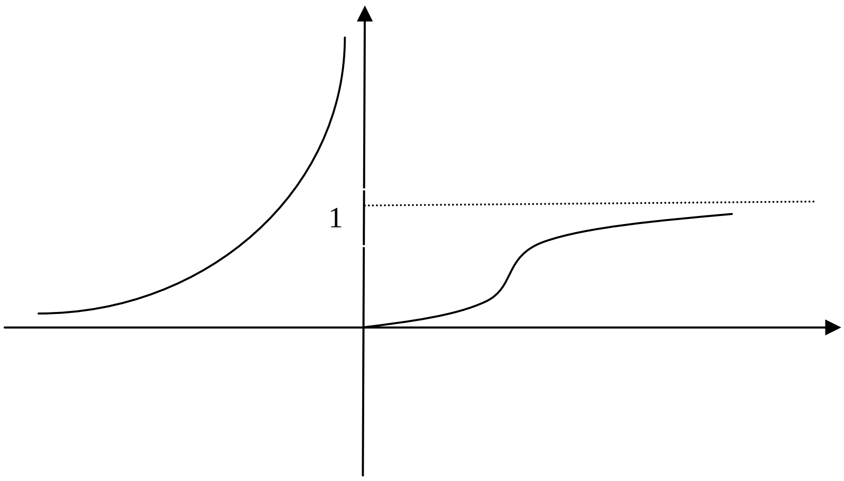
$$H'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \Phi(x) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \Phi'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \Phi(x) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^2}$$

Avec $y = \frac{1}{x}$, on a $\frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = y^2 \mathrm{e}^{-y}$. $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} y^2 \mathrm{e}^{-y} = 0$, donc

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Il en résulte : $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} H'(x) = 0$. Comme H est continue à droite en 0 et continue sur$]0, +\infty[$, on obtient alors, en utilisant le théorème sur le prolongment de la dérivée, que H est dérivable à droite en 0, et $H'_d(0) = 0$. (On aurait pu établir plus simplement ce résultat en étudiant la limite de $\frac{H(x) - H(0)}{x - 0}$quand $x \to \underset{>}{\to} 0$).

(d) Il est clair que pour tout $x \neq 0$, $H'(x)$ est positif, donc H est strictement croissant sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0\,, +\infty[$.



Pas mal non plus…

exercice 3
partie A

1. Dans tous les cas, les joueurs A et B répêtent des épreuves identiques et indépendantes jusqu'à l'obtention du premier succès, la probabilité du succès étant $\frac{1}{3}$ pour le joueur A et p pour le joueur B. Par conséquent :

$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$; $\forall x \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{P}(X = k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$

$\mathrm{E}(X) = 3$; $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{p}$; $\mathrm{V}(X) = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6$; $\mathrm{V}(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$

2. (a) $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Y - X) = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)$ (linéarité de l'espérance). Donc

$\mathrm{E}(Z) = 3 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1-3p}{p}$

Même si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{V}(Y-X)$ n'est *pas* égal à $\mathrm{V}(Y) - \mathrm{V}(X)$! Mais $\mathrm{V}(Y-X) = \mathrm{V}\big(Y + (-X)\big) = \mathrm{V}(Y) + V(-X)$ car X et Y sont indépendantes, donc toute fonction de X est indépendante de toute fonction de Y.

$\mathrm{V}(Y-X) = \mathrm{V}(Y) + \mathrm{V}(X)$ (formule $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$).

$\mathrm{V}(Y-X) = \dfrac{1-p}{p^2} + 6 = \dfrac{6p^2 - P + 1}{p^2}$

(b) avec $q = 1 - p$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} q^{k-1} p = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2q}{3}\right)^{k-1} \frac{p}{3} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{2q}{3}\right)^{i} \frac{p}{3}$$

$$= \frac{p}{3} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{2q}{3}\right)^{i} = \frac{p}{3} \frac{1}{1 - \frac{2q}{3}} = \frac{p}{3-2q} = \frac{p}{3 - 2(1-p)} = \frac{p}{1+2p}$$

$$(Z=0) = (X=Y) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [(X=k) \cap (Y=k)]$$

Par incompatibilité des événements, puis indépendance de X et Y, on en déduit

$\mathrm{P(Z = 0)} = \dfrac{\mathrm{p}}{1 + 2\mathrm{p}}$

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$(Z=n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [(X=k) \cap (Y=k+n)]$$

Toujours pas incompatibilité, puis indépendance, on obtient alors :

$$\mathrm{P}(Z=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=k+n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} q^{k+n-1} p = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2q}{3}\right)^{k-1} \frac{p}{3} q^n$$

$$= q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2q}{3}\right)^{k-1} \frac{p}{3} = q^n \frac{p}{1+2p}$$

$$(Z>0) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (Z=n) \text{ , d'où, par incompatibilité :}$$

$$\mathrm{P}(Z>0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Z=n) = \frac{p}{1+2p} \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{p}{1+2p} \left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \frac{p}{1+2p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

$$= \frac{p}{1+2p} \frac{1-p}{p} = \frac{1-p}{1+2p}$$

Z est une somme de deux variables alaéatoires, c'est donc une variable aléatoire. Z prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}$, donc

$\mathrm{P(Z < 0)} = 1 - \mathrm{P}(Z=0) - \mathrm{P}(Z>0) = 1 - \dfrac{p}{1+2p} - \dfrac{1-p}{1+2p} = \dfrac{2p}{1+2p}$

$(Z=0)$: personne ne gagne ; $(Z>0)$: Y gagne ; $(Z<0)$: X gagne.

partie B

1. Hum, le type de variable « caractère » (« char » en langage pascal) n'est pas (n'est plus) au programme…

```
function lancer(p :real) :integer ;
var A, B :char;
begin
if (random <= 1/3) then A:='P' else A:='F';
{A lance sa pièce. La probabilité de l'événement random<=1/3  est 1/3}
if (random <=p) then B:='P' else B:='F';
{même principe pour B}
if (A=B) then lancer:=0 else lancer:=1;
end;
```

2. Avec des notations évidentes :

$$\mathrm{P}(\text{"lancers différents"}) = \mathrm{P}(P_A F_B \cup F_A P_B) = \mathrm{P}(P_A)\mathrm{P}(F_B) + \mathrm{P}(F_A)\mathrm{P}(P_B)$$
$$= \frac{1}{3}(1-p) + \frac{2}{3}p = \frac{1+p}{3}$$

3. H_N est une somme de N variables de Bernouli B_k indépendantes et de même loi : $B_k = 1$ssi les pièces n'affichent pas le même résultat, probabilité $\frac{1+p}{3}$. Donc $H_N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1+p}{3}\right)$.

Détail :

$$H_N(\Omega) = [\![0\,, N]\!]\ ;\ \forall k \in [\![0\,, N]\!], \mathrm{P}(H_N = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{1+p}{3}\right)^k\left(\frac{2-p}{3}\right)^{N-k}.$$

4. $\left(\frac{3H_N}{N} - 1\right)$ est fonction uniquement de N et des éléments de l'échantillon $(B_k)_{1\le k\le N}$, il a droit au titre d'estimateur de p inconnu. D'après la linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(\left(\frac{3H_N}{N} - 1\right) = \frac{3}{N}\mathrm{E}(H_N) - 1 = \frac{3}{N}N\frac{1+p}{3} - 1 = 1 + p - 1 = p$$

L'estimateur est donc sans biais. Étant sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance, soit, en utilisant la formule $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$:

$$\mathrm{r}\left(\frac{3H_N}{N} - 1\right) = \frac{9}{N^2}\mathrm{V}(H_N) = \frac{9}{N^2}N\frac{1+p}{3}\frac{2-p}{3} = \frac{(1+p)(2-p)}{N}$$