

ESSEC math 2 voie , éco, extrait d'un problème...

On désigne par N un nombre entier supérieur à 1 et par a un nombre réel strictement positif. L'objet du problème est d'étudier la rentabilité d'un investissement en fonction du taux d'intérêt ce qui conduit à l'étude dans les parties II et III des équations suivantes pour $0 < x < 1$:

$$x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a = 0.$$

$$Nx^N + (N-1)x^{N-1} + \dots + 2x^2 + x - a = 0.$$

Dans la partie I, on étudie la première de ces équations dans deux cas particuliers ($N = 2$ et 3).

PARTIE I

1°) Résolution numérique de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

- Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une et une seule racine réelle appartenant à $]0, 1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2 .
- Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.
- Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$:

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$

- On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

2°) Résolution numérique de l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ ($0 < x < 1$)

On considère dans cette question la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

- Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle r_3 appartenant à $]0, 1[$.
- Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/3, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/3, 1]$.
- Calculer les dérivées f' et f'' de f , et en déduire le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ pour x appartenant à $[1/3, 1]$.
- On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Majorer $|u_n - r_3|$ en fonction de n et prouver la convergence de la suite (u_n) vers r_3 .

PARTIE II

3°) Etude de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

On note f_N la fonction polynôme définie par : $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x^2 + x - a$.

- Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0, 1[$ lorsque $N > a$.
- Montrer la relation (*) : $(x-1)f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$.

4°) Racine positive de l'équation $x^N + x^{N-1} + \dots + x - a = 0$

- Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante.
En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre réel x^* appartenant à $[0, 1]$.
- Montrer que $0 < x_N \leq x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leq (x_A)^N$ lorsque $N \geq A$ où A est un entier naturel non nul. En choisissant $A \geq a$, en déduire la limite de la suite (x_N^N) lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation (*), exprimer la limite x^* en fonction de a .

On convient alors de poser $x_N = \frac{a}{a+1}(1 + \varepsilon_N)$, et ε_N tend donc vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

- Etablir à l'aide de la relation (*) l'égalité suivante :

$$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1 + \varepsilon_N) \right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a).$$

En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1 + \varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation (*) un équivalent de ε_N en fonction de a et N .