II. **Analyse**

Suites numériques :convergence

1. On pose $\forall n\in N^*, a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$

a) Etudier le sens de variation de (a_n) puis sa convergence.

b) Etablir $\forall p\in \left]0,+\infty\right[, \frac{1}{p+1}\leq \ln(p+1)-\ln p\leq \frac{1}{p}$.

En déduire $\forall \mathrm{n}\in \mathrm{N}^*, \mathrm{a}_\mathrm{n}-\frac{1}{\mathrm{n}}\leq \ln 2\leq \mathrm{a}_\mathrm{n}-\frac{1}{2\mathrm{n}}$.

Préciser alors $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

c) On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}$. Montrer par récurrence que $\forall n\in N^*$, $S_{2n}=a_n-\frac{1}{n}$ Qu'en déduit-on pour la série harmonique alternée ?

2. On pose $\forall n\in N^*, u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

a) Montrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ .On note S sa somme.

b) Justifier que, pour tout n, S est compris entre u_n et u_{n+1}.
Ecrire un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de S d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

3. On considère les deux suites définies par $a_0=a>0,\ b_0=b>0$ et

$$\forall n\in N, \begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n} \end{cases}$$

a) Montrer que ces deux suites sont bien définies.

b) Justifier $\forall n\in N^*, a_n-b_n\geq 0$

c) Etudier le sens de variation de $(a_n),(b_n)$. En déduire que ces deux suites convergent et qu'elles ont la même limite.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall \mathrm{n}\in \mathrm{N}, \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2}$

a) étude de $f: x\mapsto \frac{e^x}{x+2}$

   i) Calculer f', f''.

   ii) Construire le tableau de variation de f ; préciser $f([0,1])$.

   iii) Justifier : $\forall x\in [0,1],\ \frac{1}{4}\leq f'(x)\leq \frac{2}{3}$.

   iv) Etablir que l'équation $f(x)=x$ admet sur [0,1] une unique solution α .

b) étude de (u_n)

   i) Montrer que, si (u_n) converge, sa limite est α.

ii) Justifier $\forall n \in N, 0 \le u_{n+1} - \alpha \le \frac{2}{3}(u_n - \alpha)$, en déduire $0 \le u_n - \alpha \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$, conclure.

iii) Déterminer n_0 tel que $n \ge n_0 \Rightarrow |u_n - \alpha| \le 10^{-3}$; en déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Séries numériques

1 Etudier la convergence et calculer la somme, si elle existe, des séries de terme général

a) $\frac{n}{n+1}, n \ge 0$

b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, n \ge 0$ (on calculera les sommes partielles à l'aide de l'expression conjuguée)

c) $\frac{3+2^n}{4^{n+1}}, n \ge 1$

d) $\frac{(n+1)^2}{(-2)^n}, n \ge 0$

e) $\frac{(-1)^n}{n!}, n \ge 0$

f) $\frac{(n+1)^2}{n!}, n \ge 1$

2 En la comparant avec une série classique, étudier la convergence de la série de terme général

a) $\frac{1}{3^n+1}, n \ge 0$

b) $\frac{1}{n\sqrt{n}\ln n}, n \ge 2$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}-1}, n \ge 2$

3 Justifier la convergence absolue de $\sum u_n, n \ge 0$ où

$u_n = \begin{cases} \frac{-n}{2^n} \; si\ n\ est\ pair \\ \frac{1}{3^n} \; si\ n\ est\ impair \end{cases}$. Calculer sa somme.

4 Un jeu consiste en une succession de lancers d'un dé normal. A l'issue de chaque lancer
si le joueur obtient 1, il a gagné et le jeu s'arrête,
si le joueur obtient 5 ou 6, il a perdu et le jeu s'arrête,
sinon le jeu continue.

a) Pour $n \in N^*$, déterminer la probabilité p_n que le jeu continue jusqu'au *n*-ième lancer ; déterminer la probabilité v_n de l'événement V_n : « le jeu s'arrête par victoire à l'issue du *n*-ième lancer ».

b) Exprimer l'événement V ; « le joueur gagne » à l'aide des V_n, puis calculer sa probabilité.

Développements limités

1. Déterminer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :
   a) $f(x)=e^x-\ln(1+x)$ b) $f(x)=\sqrt{1+x}+3\sin x$ c) $f(x)=\cos 2x-\ln(1-x)$
   d) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x}$ e) $f(x)=\ln(\cos x)$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de :
   a) $f(x)=\sqrt{x}$ au voisinage de 1 b) $f(x)=\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ au voisinage de 2

3. En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$
   d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^x-2\sqrt{1+x}}{1-\cos x}$

4. Trouver un équivalent au voisinage de 0 de $2+\ln(1+x)-2\sqrt{1+x}$.

5. A l'aide d'un développement limité au voisinage de 0 de $x-\ln(1+x)$, trouver la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})$.

6. On considère la fonction f définie sur] –1, + ∞ [par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

   En utilisant le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 :
   a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
   b) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

7. Soit f la fonction définie sur] 0, +∞ [par : $\begin{cases} \forall x\in\ ]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[, & f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln x} \\ f(1)=3 \end{cases}$

   Montrer que f est continue et dérivable sur] 0, + ∞ [.

8. Préciser le comportement au voisinage de l'infini de la courbe représentative des fonctions suivantes. On indiquera, le cas échéant, la position de la courbe par rapport à son asymptote.
   a) $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ b) $f(x)=x^2\ln\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$
   c) $f(x)=x\exp\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$ d) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x-3}}$

Intégration

1. Etudier l'existence des intégrales suivantes et les calculer :

a) $\int_1^e (x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx$ b) $\int_{-1}^x \frac{dt}{1-t}$ c) $\int_0^{\pi/6} \sin 3u\, du$

d) $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \; (n \in N^*)$ e) $\int_{e^2}^e \frac{\ln t}{t} dt$ f) $\int_0^2 |1-t|^3 dt$ g) $\int_a^{a^n} \frac{dx}{x \ln x}$

2. Soient I et J les intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{ et } J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

Calculer I + J et I – J . En déduire I et J.

3. a) Déterminer les conditions d'existence de l'intégrale $I(x) = \int_1^x \frac{t^2 + 3t + 6}{t+1} dt$ et la calculer (on effectuera la division euclidienne par t + 1).

b) Représenter graphiquement la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2 + 3t + 6}{t+1}$. Interpréter $I(x)$ en terme d'aire. Etudier sa limite lorsque $x \to -1$.

c) Mêmes questions avec $J(x) = \int_1^x g(t)dt$ où $g : t \mapsto t + 2 + \frac{4}{(t+1)^2}$.

4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale F(x) = $\int_1^x \frac{[t]}{t} dt$ est bien définie.

([t] = partie entière de t, E(t) = n tel que n ∈ **Z** et n ≤ t < n + 1.)

En donner une interprétation graphique. Calculer F(2), F(3), puis F(n) lorsque n ∈ N^* et enfin F(x) lorsque x Î [n, n + 1[.

5. Soit $f : x \mapsto \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

Déterminer l'ensemble de définition D de f, montrer que f est dérivable sur D et calculer f'. En déduire $f(x)$ pour tout x de D.

6. On considère, pour tout entier non nul n, la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} si\ x \in [0,\ 1/n[, & f_n(x) = -n^3x^2 + n^2x, \\ si\ x \in [1/n,\ 1], & f_n(x) = 0 \end{cases}$$

a) Justifier l'existence de $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ et la calculer. Montrer que la suite (I_n) est convergente et préciser sa limite.

b) A toute valeur fixe x de [0, 1] on associe la suite de terme général $j_n = f_n(x)$. Montrer que (j_n) est convergente et préciser sa limite.

On définit alors la fonction f sur [0, 1] par $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Comparer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx$.

7. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^x t\, e^{2t}\, dt$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(3x)\, dx$ c) $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$

d) $\int_a^4 \sqrt{x}\, \ln x\, dx$ puis sa limite lorsque $a \to 0$

e) $\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3} dt$ f) $\int_0^{\pi} \sin u\, e^u\, du$

8. A l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt$ $(u = \cos t)$ b) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ $(u = x^3+1)$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $(u = e^x)$ d) $\int_1^e \sin(\pi \ln x) dx$ $(u = \pi \ln x)$

e) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ $(x = \sin t)$ [dériver $t \mapsto \sin t \cos t$ pour trouver une primitive de $\cos^2 t$]

g) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$ $(t = \sqrt{u^2-1}$ puis $t = \tan x)$

9. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin(t^n)\ln(1+t^2)dt = 0$. [On pourra utiliser l'inégalité classique $\forall u \in R_+ \quad 0 \le \sin u \le u$]

10. Montrer que : $\forall t \ge 1 \quad \frac{1}{t+1} \le \frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t}+1}} \le \frac{1}{t}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+\sqrt{t}+1}} dt = \ln 2$.

11. Trouver la limite des expressions suivantes quand n tend vers +∞ :

a) $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p}{n}\right)^3$ b) $\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\cos\frac{p\pi}{n}$ c) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{k+n}$

12. a) Etudier la fonction f : $x \mapsto \ln(1+x^2)$ et calculer I = $\int_0^1 f(t)dt$ (on utilisera une intégration par parties).

b) Déterminer la limite de la suite de terme général : $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

13. On considère la fonction numérique Φ définie par $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$.

a) Quel est le domaine de définition de Φ ?
b) Montrer que Φ est une fonction impaire.
c) Etablir, pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \le \Phi(x) \le \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.

En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

d) Justifier la dérivabilité de Φ sur **R** et calculer $\Phi'(x)$.
   Dresser le tableau de variation de Φ.
e) Déterminer, à l'aide de la méthode des rectangles, une valeur approchée de $\Phi(1)$ à 0.05 près.
f) Donner l'allure de la courbe représentative de Φ.

Intégrales généralisées

1. En revenant à la définition, étudier la convergence et, éventuellement, calculer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

b) $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}$

c) $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$

e) $\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

f) $\int_0^{1} \frac{dt}{t\ln t}$

g) $\int_0^{1} t\ln t dt$

h) $\int_0^{2} \frac{t-1}{\sqrt{t(2-t)}}dt$

2. Soit f une fonction impaire continue sur $]-a, a[$ telle que $\int_0^a f(t)dt$ converge. Justifier la convergence de $\int_{-a}^0 f(t)dt$; en déduire la convergence et la valeur de $\int_{-a}^a f(t)dt$.

3. Soit, pour tout entier n, $\quad \mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx \quad$,sous réserve de convergence.

a) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$. En déduire la convergence de I_1.

b) On pose $\mathrm{J}_n(a) = \int_0^a xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$

   Trouver une relation de récurrence entre $\mathrm{J}_n(a)$ et $\mathrm{J}_{n-2}(a)$. En déduire que, pour tout entier n, I_n converge et trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2} .

c) Calculer I_n pour n impair.

   En admettant le résultat $\mathrm{I}_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n pour n pair.

4. Soit $\quad g : [1, +\infty[\to R \quad$ où α est un réel strictement positif donné,

$$x \mapsto \frac{\alpha \ln x}{x^2+2x}$$

et G définie sur I = [1, $+\infty$ [par $\mathrm{G}(x) = \int_1^x g(t)dt$.

a) Etablir que G est strictement croissante sur I.

b) Prouver que,

   pour tout $x \geq 1$, $\quad \int_1^x \frac{\alpha \ln t}{(t+1)^2}dt \leq \mathrm{G}(x) \leq \int_1^x \frac{\alpha \ln t}{t^2}dt$.

c) Calculer, pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$.

   En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $\mathrm{G}(x) \leq \alpha$.

   Prouver que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge.

5. Soit f la fonction définie sur **R** par $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1)^2}$.

a) A l'aide d'un changement de variable simple, calculer $\int_0^x f(t)dt$.

Montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, puis de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3 f(t)$. En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

Justifier l'existence et donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

6. Pour tout entier non nul p, on pose $\mathrm{I}_p = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{p-1}du$.

Montrer que I_p converge.
Montrer que $\mathrm{I}_p = (p-1)\,\mathrm{I}_{p-1}$.
En déduire la valeur de I_p en fonction de p.

7. Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

Calculer sa valeur (on montrera l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on ait $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$).

8. Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^p}{e^x-1}dx \;\; (p \in N^*)$,

puis de $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^p(\cos x)^n}{e^x-1}dx \;\; (n \in N)$.

Fonctions de deux variables

1. On considère les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(0,0) = a \text{ où } a \text{ est un réel donné} \\ g(x,y) = \dfrac{x^2y}{|x|^3+|y|^3} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

a) Etudier leur continuité sur $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$

b) Montrer que $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ puis que $|f(x,y)| \le \|(x,y)\|$. f est–elle continue en (0, 0) ?

c) Etudier $\lim\limits_{x\to0} g(x,x)$. g est–elle continue en (0, 0) ?

d) Montrer que g admet des dérivées partielles en (0, 0).

2. Déterminer les parties de $\mathbf{R}^2$ sur lesquelles sont définies les fonctions suivantes :

a) $(x,y) \mapsto \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $(x,y) \mapsto \ln(1-xy)$ c) $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{-xy}$

Lorsqu'elles existent, calculer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. Calculer les dérivées partielles de la fonction *f* définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y)=(x^2-y)(3x^2-y).$$

Vérifier que *f* est de classe C^1.
Ecrire le développement limité d'ordre 1 de *f* en (1, 1).
En déduire une valeur approchée de *f*(1.02, 0.99).

4. Soit *f* définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y)=x^2+y^2+(3-x-y)^2$.
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de *f*.
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction

$$g:(u,v)\mapsto f(u+v,u-v)$$

– en appliquant la formule de dérivation d'une fonction composée.
– en explicitant $g(u,v)$.

5. Soit *f* définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y)=y^3-3x^2y$.

a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1, f'_x (= $\dfrac{\partial f}{\partial x}$) et f'_y (= $\dfrac{\partial f}{\partial y}$).

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions f'_x et f'_y.

6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions définies sur $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y > 0\}$

$$g:(x,y)\mapsto x(\ln y)^2+y^2$$

$$h:(x,y)\mapsto (\ln y)^2+2\ln y+x^2.$$

Que peut–on dire d'une fonction *f* telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$?

7. Etudier les extrema de la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2$$