

Chapitre III

variables aléatoires discrètes.

1. 1°) Un dé cubique D_1 comporte 3 faces marquées 1, 2 faces marquées 2, 1 face marquée 3. On lance le dé D_1 , on note X_1 le nombre obtenu, Déterminer la loi de X_1 son espérance, sa variance.
 2°) Mêmes questions pour X_2 le nombre obtenu en lançant un dé D_2 comportant 3 faces marquées 4, 2 faces marquées 5, 1 face marquée 6.
 3°) On lance D_1 et D_2 simultanément, Calculer l'espérance de $Z = X_1 + X_2$. Vérifier en déterminant la loi de Z .

2. On choisit une carte au hasard dans Ω , jeu de 52 cartes. On définit la valeur X de la carte ainsi tirée comme suit :

$X(\omega)$	= 4	si ω est un as ;
$X(\omega)$	= 3	si ω est un roi ;
$X(\omega)$	= 2	si ω est une dame ;
$X(\omega)$	= 1	si ω est un valet ;
$X(\omega)$	= 0	dans les autres cas.

 Loi de probabilité de X , Valeur moyenne d'une carte. Ecart-type de X . Valeur moyenne d'une main de 13 cartes.

3. Jeu "chuck a luck" (Etats-Unis), "crown and anchor" (Angleterre). On parie sur un nombre de 1 à 6. On lance 3 dés. Si le nombre sur lequel on a parié sort :

3 fois,	on gagne	3 F ;
2		2 F ;
1		1 F ;
0 fois,	on perd	1 F.

 Soit X le gain lors d'une partie, déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

4. Un vendeur de journaux a, chaque semaine, entre 0 et 5 clients pour une revue hebdomadaire. Soit $E = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ où A_n désigne l'événement : il y a au n clients pour la revue, $0 \leq n \leq 5$. $(E, P(E))$ est muni de la probabilité P définie par :

$P(A_0) = P(A_5) = 1/32$
$P(A_1) = P(A_4) = 5/32$
$P(A_2) = P(A_3) = 10/32$

 Le vendeur gagne 3 F par exemplaire vendu et perd 1 F en frais divers par exemplaire invendu. Dans le cas où il a commandé p exemplaires on définit sur E la variable aléatoire G_p par :
 $G_p(A_n) =$ gain du vendeur lorsque n clients se sont présentés dans la semaine ($0 \leq n \leq 5$).
 1°) Calculer $G_p(A_n)$ pour tout p dans $[[1, 5]]$ et tout n dans $[[0, 5]]$. Disposer les résultats sous forme de tableau.
 2°) Calculer $E(G_i)$ pour tout i dans $[[1, 5]]$. Que feriez-vous à la place du vendeur ?

5. k urnes numérotées de 1 à k contiennent chacune n boules identiques numérotées de 1 à n . On extrait une boule de chaque urne, on note X_i le numéro de la boule tirée de l'urne $n^\circ i$.
 On note $M = \max\{X_i ; 1 \leq i \leq k\}$.
 Déterminer la fonction de répartition F_m de la variable aléatoire M . (On fera les hypothèses d'indépendance nécessaires).
 En déduire la loi de M . Calculer $E(M)$ pour $k = 2 ; k = 3$.

Lois finies.

6. Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = 0,25$.
- 1°) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.
- Définir la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
 - Calculer (à 0,01 près au plus proche) les probabilités des événements :
 - le client a subi au moins un retard ;
 - le client a subi moins de 4 retards ;
 - le client a subi moins de 4 retards sachant qu'il en a subi au moins un.
- 2°) On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Définir la loi de M . La donner explicitement. Calculer $E(M)$.
7. Un jeu de 32 cartes est truqué : on a remplacé une carte autre que l'as de pique par un deuxième as de pique. On tire au hasard une main de n cartes, $n < 32$.
- Quelle est la probabilité de déceler la supercherie ?
 - On suppose $n = 4$ et on renouvelle l'expérience consistant à tirer 4 cartes du jeu (en remettant les 4 cartes tirées à chaque fois). Quel est le nombre minimum d'expériences à réaliser pour que la supercherie soit découverte avec une probabilité au moins égale à 0,95 ?
8. A et B sont deux avions avec respectivement 2 moteurs et 4 moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne. Les pannes surviennent de façon indépendante. Chaque avion arrive à destination ssi moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne.
Quel avion choisissez-vous ?
9. 2 joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun. On note X, Y le nombre de 'pile' obtenus respectivement par A, B.
- Pour tout k dans $[[0, n]]$, calculer la probabilité de l'événement : $(X = k)$ et $(Y = k)$.
 - En déduire la probabilité que A et B obtiennent le même nombre de fois "pile".
10. Soit X une v.a suivant la loi binomiale de paramètres n et p . On définit la v.a. Y par :
- $Y = X$ si $X \neq 0$;
 - Y prend une valeur au hasard dans $[[1, n]]$ si $X = 0$.
- Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.
11. (Ecricome 89) Deux personnes A et B partent en vacances de façon indépendante dans un pays E. Leur séjour dans ce pays peut s'étaler sur n journées ($n > 3$) numérotées 1, 2, ..., n . Pour éventuellement s'y rencontrer, elles ont projeté d'y séjourner trois jours consécutifs (et trois jours seulement) dans un hôtel H, choisi par elles. On suppose que les jours d'arrivée possibles 1, 2, ..., $n-2$ de ces deux personnes dans cet hôtel sont deux variables aléatoires uniformes et indépendantes. Les arrivées ont lieu le matin et les départs le soir deux jours plus tard.
- Quelle est la probabilité que A et B arrivent le même jour ?
 - Quelle est la probabilité qu'elles arrivent avec un jour d'écart ?
 - Quelle est la probabilité qu'elles puissent se rencontrer dans l'hôtel ?
 - Sachant que A et B se sont rencontrées, quelle est la probabilité qu'elles ne puissent passer qu'une journée ensemble ?

- 12.** (insec 91) 1°) Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches. Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Si il tire une boule blanche il gagne 2 points dans le cas contraire il perd trois points. Soit X le nombre de points obtenus par le joueur en une partie.
- Dresser le tableau définissant la loi de X .
 - Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
- 2°). Le joueur tire 5 boules simultanément, les 10 boules de l'urne étant numérotées de 1 à 10.
- Soit Y le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$.
 - Soit T le nombre de boules blanches obtenues. Après ce premier tirage le joueur remet les boules noires obtenues et effectue un nouveau tirage simultané de 5 boules. On appelle Z le nombre de boules blanches obtenues lors de ce second tirage. Déterminer les lois de T et de Z . Calculer $E(T)$.
- 13.** (iscid 91) On considère une urne de taille N ($N > 1$) contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne on prélève toutes les boules une à une et SANS remise. On note X le rang d'apparition de la dernière boule blanche. Le but du problème est de déterminer :
- la loi de X ;
--l'espérance et la variance de X .
- Traiter le cas $N = 4, r = 1$.
 - Traiter le cas $N = 4, r = 2$.
 - Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
 - Etude du cas général ($1 < r < N$) :
 - Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
 - Soit k l'une de ces valeurs. Déterminer la probabilité pour qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparues $r-1$ boules blanches (et donc $k - r$ boules noires). En déduire la valeur de $P(X = k)$ c'est-à-dire la probabilité que la r -ième (et dernière) boule blanche apparaisse au k -ième tirage.
- c) Vérifier, après simplifications, que $P(X = k) = \frac{C_{k-1}^{r-1}}{C_N^r}$. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{k=r}^N C_{k-1}^{r-1}$, puis $\sum_{k=r}^N C_k^r$.
- d) On rappelle que $n C_{n-1}^{p-1} = p C_n^p$. En déduire que $E(X) = \frac{r(n+1)}{r+1}$.
- (Remarque : l'énoncé proposait aussi le calcul de $\sum_{k=r}^N C_{k+1}^{r+1}$, puis de $E(X(X+1))$, et enfin de $V(X)$...)
- 14.** (escp 94 0e) On dispose d'un jeu de m cartes, m étant un entier supérieur ou égal à 2. Ces cartes sont numérotées de 1 à m . Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 franc que B lui verse à chaque partie. B tire une carte au hasard, montre le nombre b qu'elle porte et remet la carte dans le paquet. Puis A tire une carte au hasard ; quand celle-ci porte le nombre a :
- Si $a < b$, alors B donne à A la somme de $b - a$ francs ; B a donc gagné $(b - a - 1)$ francs
Si $a > b$, alors B donne à A la somme de 1 franc et B a donc perdu 2 francs.
Si $a = b$, alors B a simplement perdu 1 franc, le montant de sa mise.
- 1°) On suppose dans cette question que $m = 6$.
- Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (a, b) .
 - Soit X la variable aléatoire représentant les gains de B. Donner la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il équilibré ou avantage-t-il un des joueurs ?
 - Calculer la variance de X .

2°) On revient au cas général : $m \geq 2$.

a) Etablir, en préliminaire, les formules suivantes, pour tout entier $N \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^N k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} .$$

b) Calculer, en fonction de m , l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X .

c) Pour quelles valeurs de m l'espérance de X est-elle positive ?

d) Calculer, en fonction de m , la variance de X .

3°) On observe m parties successives et on note $Y_n(m)$ le nombre de parties où le gain de B est strictement positif. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_n(m)$, son espérance et sa variance en fonction de n et de m .

15. (esco 94 ot) Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune des boules blanches et des boules noires. U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires, U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires. On effectue une suite de tirages avec remise de la boule tirée en procédant comme suit :

Le premier tirage s'effectue dans U_1 . Si au n -ième tirage on obtient une boule blanche alors le $(n+1)$ -ième tirage s'effectue dans U_1 . Si au n -ième tirage on obtient une boule noire alors le $(n+1)$ -ième tirage s'effectue dans U_2 .

On désigne par :

p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n -ième tirage ;

X_n la variable aléatoire qui vaut 1 Si la boule obtenue au n -ième tirage est blanche, 0 sinon.

S_n est le nombre total de boules blanches obtenues au bout de n tirages.

1°) Calculer p_1, p_2 .

2°) Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n ; en déduire l'expression de p_n en fonction de n , et la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

3°) Pour n supérieur ou égal à 1, donner la loi de X_n . Préciser $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

4°) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

5°) Exprimer S_n , en fonction des $X_k, 1 \leq k \leq n$; En déduire $E(S_n)$.

16. (insec 2002) Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12. Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12, il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros choisis.

Un joueur, possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

* Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.

** S'il perd à la $n^{\text{ème}}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{\text{ème}}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1) On note p_n la probabilité de l'événement A_n : " le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie".

a) Calculer les probabilités conditionnelles :

$p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(A_{n+1} / \bar{A}_n)$, en déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*, p_{n+1} = (1/12)p_n + 1/6$.

b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

2) Soit $k \in [[1, n]]$, on note B_k l'événement "le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{\text{ème}}$ partie".

a) A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $p(B_n)$.

b) Soit $k \in [[1, n - 1]]$, calculer $P(B_k)$.

c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Lois infinies discrètes

- 17.** On lance un dé indéfiniment ; X est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier "6". Y est le nombre de lancers nécessaires après l'obtention du premier "6", pour obtenir le deuxième "6".
- 1°) Loi de X , de Y , espérance et variance de X et de Y .
 - 2°) Soit $Z = X + Y$; espérance et variance de Z ; loi de Z . interprétation de Z . Retrouver directement la loi de Z .
- 18.** On lance des fusées vers Saturne ; la probabilité de succès à chaque lancer est 0,7.
- 1°) Probabilité d'obtenir k succès en 10 lancers, $k \in [[0, 10]]$? Nombre moyen de succès par série de 10 lancers ?
 - 2°) Combien faut-il prévoir de lancers pour être sûr a 90% d'obtenir au moins un succès ? (Deux méthodes sont envisageables.)
- 19.** (d'après esg 92) La première question est indépendante des suivantes. On considère un lot de 10 dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sur ces 10 dés, cinq sont équilibrés, les cinq autres sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir la face n°1 quand on le lance sera prise égale à 5/6.
- 1°) On choisit un dé au hasard du lot, on le lance 3 fois et on obtient 3 fois la face n°1. Quelle est la probabilité de l'événement : "le dé choisi est pipé" ?
 - 2°) On effectue des lancers successifs d'un dé équilibré et on arrête dès que l'on a obtenu pour la première fois la face n°1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués avec ce dé. On effectue des lancers successifs d'un dé pipé et on arrête dès que l'on a obtenu pour la première fois la face n°1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués avec ce dé.
 - a) Déterminer la loi de X et calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
 - b) Déterminer la loi de Y et calculer l'espérance mathématique et la variance de Y .
 - 3°) Calculer la probabilité de l'événement $(X = Y)$.
 $(X = Y)$ signifie $(X = 1 \text{ et } Y = 2)$ ou $(X = 2 \text{ et } Y = 2)$ ou etc.
 - 4°) Calculer la probabilité de l'événement $(X < Y)$.
 $(X < Y)$ signifie $(X = 1 \text{ et } Y > 1)$ ou $(X = 2 \text{ et } Y > 2)$ ou etc.
 - 5°) On prend un dé pipé du lot, on effectue des lancers successifs et on arrête dès que l'on a obtenu pour la première fois une face ne portant pas le n°1. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués avec ce dé. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Z$ et calculer son espérance mathématique.
- 20.** (D'après hec math 2 91) On désigne par x un nombre réel appartenant à $]0, 1[$. N et n sont des n nombres entiers naturels non nuls On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet est $1 - x$ et que la probabilité d'obtenir face est x . Les jets sont supposés indépendants.
- On désigne enfin par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets, par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la n -ième fois.
- 1°) Préciser la loi de S_n . Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
 - 2°) Préciser la loi de T_1 . CALCULER l'espérance et la variance de cette variable aléatoire. Pour la variance, on commencera par calculer $E(T_1.(T_1 - 1))$.
 - 3°) L'objet de cette question est de calculer l'espérance de T_r . Soit k un nombre entier naturel et r un nombre entier naturel non nul.
 - a) Montrer que l'événement $\{T_r = k + r\}$ est réalisé si et seulement si les événements :
 $\{S_{k+r-1} = r - 1\}$ et "pile est obtenu au $(k+r)$ -ième jet" le sont. En déduire la loi de T_r .
 - b) Vérifier que la somme des probabilités des événements $\{T_r = k + r\}$, où k appartient à \mathbf{N} , est égale à 1. Calculer l'espérance de T_r . On admettra que la série de terme général $C_{r+k}^r . x^k$, k appartenant à \mathbf{N} , est convergente, de somme $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, et on rappelle que $pC_N^p = N.C_{N-1}^{p-1}$, pour tout N , p appartenant à \mathbf{N}^* .

4°) Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. Un joueur parle de la façon suivante. Lors du n -ième jet, il mise 1 franc.

--Si pile sort, il reçoit la somme a (en francs), et il perd sa mise ;

--sinon, il perd sa mise.

On désigne par G_n la somme des profits et pertes (celles-ci étant comptées négativement) du joueur après son n -ième succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).

a) Montrer que $G_1 = a - T_1$ et calculer l'espérance de T_1 .

b) Plus généralement, pour tout nombre entier naturel non nul r , exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r

c) Etudier la limite de G_r quand r tend vers $+\infty$.

21. (D'après isg 90 ot) On admettra que pour $|x| < 1$ et k dans \mathbf{N}^* :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.

1°) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad P(X = n) = (1-a)^n \cdot a.$$

a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance de X .

2°) Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion p et q , $p+q = 1$.

On effectue des tirages avec remise ; le nombre de tirages suit la loi de X . Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Calculer pour tous les entiers k et n la probabilité conditionnelle $P(Y = k / X = n)$, ainsi que

$$P(Y = k \cap X = n).$$

b) En déduire la loi de Y et calculer l'espérance de Y .

22. (escp 96) Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches, q pour les noires, r pour les rouges ($p + q + r = 1$).

On fait dans cette urne des tirages successifs et indépendants numérotés 1, 2, ... etc. Ces tirages sont faits avec remise de la boule tirée. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

1°) On note X_1 la v.a. représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1 . Calculer son espérance et sa variance.

2°) On note X_2 la v.a. représentant le numéro du deuxième tirage d'une boule blanche. Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k, l) la probabilité de l'événement :

$$(X_1 = k, X_2 = k + l). \text{ En déduire la loi de probabilité de } X_2.$$

Montrer que la v.a. $U_2 = X_2 - X_1$ est indépendante de X_1 et qu'elle a la même loi de probabilité. En déduire l'espérance et la variance de X_2 .

3°) On note W la v.a. représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Pour tout couple (k, l) de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement $(W = l)$ sachant que $X_1 = k$. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant X_1 ?

4°) On note Y_1 la v.a. représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a) Trouver la loi de probabilité du couple (X_1, Y_1) . Les v.a. X_1 et Y_1 sont-elles indépendantes ?

b) On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est à dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de (X_1, Y_1) .

5°) Soit, pour n entier strictement positif, Z_n la v.a. qui prend la valeur $+1$ si au n -ième tirage une boule blanche est tirée, -1 si au n -ième tirage une boule noire est tirée, 0 si au n -ième tirage une boule rouge est tirée. On note $S_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$.

a) Trouver la loi de probabilité de S_1 . Calculer son espérance et sa variance ; en déduire l'espérance et la variance de S_n pour tout $n \geq 1$.

b) Soit t un réel strictement positif. On pose $V_n = t^{S_n}$. Trouver la loi de probabilité de la v.a. V_1 et calculer son espérance. c) En déduire l'espérance de V_n .

- 23.** La distance en kilomètres qu'un enfant accepte de parcourir sur son vélo suit la loi de Poisson de moyenne 2. Une promenade autour d'un lac fait 3 km.
- 1°) Calculer la probabilité pour un enfant de 5 ans de faire le tour du lac en vélo.
 - 2°) Sept enfants accompagnés de leurs parents commencent le tour du lac en vélo. Ceux qui ne le termineront pas seront privés de dessert. Soit X le nombre d'enfants privés de dessert. Déterminer la loi de X , son espérance, sa variance.
- 24.** Dans le département de Seine-et-Marne, le nombre par an d'accidents graves mettant en cause un camion-citerne suit la loi de Poisson de paramètre 8. Calculer la probabilité d'avoir une année plus de 7 accidents de ce type.
- 25.** Pour une femme ayant eu entre 18 et 20 ans en 1958, le nombre d'enfants suit une loi de Poisson. Un échantillon de 1000 individus de cette population comporte 135 femmes sans enfant. En déduire une estimation du paramètre de la loi de X . Estimer la proportion de la population étudiée ayant plus de 3 enfants.
- (Les exercices 22 à 24 sont extraits de "Exercices de probabilités ordinaires", G. Frugier, ed. Ellipses)*
- 25.** (Utilisation des tables numériques de la loi de Poisson) Une v.a. X représente le nombre annuel de pannes d'un certain type d'appareils électriques. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre m ($m > 0$).
- 1°) Déterminer m sachant que la probabilité pour qu'un appareil de ce type tombe en panne moins de 4 fois dans l'année est 0,981. Calculer alors la probabilité pour qu'un appareil ait au plus 2 pannes dans l'année.
 - 2°) On teste simultanément 10 appareils au cours d'une année ; soit Y le nombre d'appareils ayant au moins une panne dans l'année. Déterminer la loi de Y (préciser éventuellement les hypothèses nécessaires).
- 26.** (Somme de deux variables poissonniennes indépendantes ; lien poisson-binomiale) Le nombre X de véhicules légers empruntant un pont de faible trafic par période d'une heure suit la loi de Poisson de paramètre a . Le nombre Y de poids-lourds empruntant ce même pont par période d'une heure suit la loi de Poisson de paramètre b . On suppose que X et Y sont indépendants. Soit $Z = X + Y$.
1. Déterminer la densité moyenne par heure de trafic sur ce pont.
 2. Déterminer la loi de Z . Retrouver le résultat du 1...
 3. Sachant qu'à une heure donnée il y a eu en tout n véhicules empruntant le pont, quelle est la probabilité qu'il y ait eu k poids-lourds parmi eux ?
- 27.** (conditionnement de Poisson) Le nombre N de clients par tranche de 10 minutes dans un grand magasin suit la loi de Poisson de paramètre m . Chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Les vols ont lieu de façon mutuellement indépendante. Soit X le nombre de clients volés par tranche de 10 minutes.
- Déterminer la loi de X .
- Soit $Y = N - X$. Déterminer la loi de Y . Prouver que X et Y sont indépendantes.
- 28.** Le nombre N d'enfants d'une famille d'une population bien définie suit la loi de Poisson de paramètre m . Chaque enfant présente à la naissance la probabilité p d'avoir un caractère génétique bien défini, et ceci de façon indépendante. Soit X le nombre d'enfants d'une famille présentant ce caractère et Y le nombre d'enfants ne le présentant pas.
1. Quelle relation existe-t-il entre N , X , Y ?
 2. Pour n dans \mathbf{N} et k dans $[[0, n]]$, déterminer $P(X=k/N=n)$. En déduire la loi de probabilité de X . Que remarque-t-on ?
 3. Déterminer la loi de probabilité de Y .
 4. Montrer que X et Y sont indépendantes.
 5. Application. $m = 2$, $p = 0,4$. Déterminer la probabilité pour une famille d'avoir 3 enfants présentant le caractère génétique considéré et 2 enfants ne le présentant pas.

- 29.** (deug) Un ascenseur dessert les N étages d'un immeuble, N étant un entier naturel non nul. A chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur est une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que :
- chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers, ces choix se faisant dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur ;
 - aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre étage.

1°) Soit N_0 un entier fixé, dans $\{1, 2, \dots, N\}$ et Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers choisissant l'étage N_0 .

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner, sans calcul, la loi de probabilité de Y conditionnelle à $(X = k)$.

b) Déterminer la loi de probabilité de Y . On observera que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de probabilité de X conditionnelle à $(Y = n)$.

2°) soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$. Pour tout entier naturel k , l'espérance mathématique de Z conditionnelle à $(X = k)$ est définie par :

$$E(Z / X = k) = \sum_{j=0}^N j P(Z = j / X = k).$$

Montrer que l'espérance mathématique de Z est donnée par :

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k).E(Z / X = k).$$

On pourra utiliser le résultat suivant : si $(a_{k,j})_{k \in \mathbb{N}, j \in \{0,1,\dots,N\}}$ est une suite de nombres réels tels que, pour

tout $j \in \{0, 1, \dots, N\}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ est convergente, alors on a $\sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^N a_{k,j}$.

3°) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.

a) Justifier les égalités suivantes :

$P(Z = 0 / X = 0) = 1$ et, pour tout entier $j = 1, \dots, N : P(Z = j / X = 0) = 0$;
 $P(Z = 1 / X = 1) = 1$ et, pour tout entier $j = 2, \dots, N : P(Z = j / X = 1) = 0$;
pour tout entier $k \geq 1 : P(Z = 0 / X = k) = 0$;

pour tout entier $k \geq 1 P(Z = 1 / X = k + 1) = \frac{1}{N} P(Z = 1 / X = k) :$

pour tous entiers $j = 2, \dots, N$ et $k \geq 1 :$

$P(Z = j / X = k + 1) = \frac{j}{N} P(Z = j / X = k) + \frac{N-j+1}{N} P(Z = j - 1 / X = k).$

b) Pour tout entier $k \geq 0$, on pose $u_k = E(Z / X = k)$.

Démontrer que, pour tout entier $k \geq 0$, $u_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) u_k$.

Après avoir justifié que $u_0 = 0$, en déduire l'expression de u_k en fonction de k .

On vérifiera que $u_k = N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right)$.

c) En déduire que $E(Z) = N \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$.

d) Donner un équivalent de $E(Z)$ lorsque N tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Loi d'un couple, covariance.

30. 1°) Soit X une v.a. suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Soit $Y = X^2$, déterminer la loi du couple (X, Y) . En déduire la loi de Y . Calculer $\text{cov}(X, Y)$. Que peut-on en conclure ?
 2°) Mêmes questions avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

31. La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

Déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$. Conclusion ?

32. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes et de même loi, avec :

$$P(X_i = 0) = 1/6 \quad P(X_i = 1) = 1/3 \quad P(X_i = 2) = 1/2$$

Soit $S = X_1 + X_2$, $P = X_1 X_2$.

1°) Loi du couple (S, P) .

2°) Lois marginales du couple (S, P) . S et P sont-elles indépendantes ?

3°) Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$, $V(P)$, $\text{cov}(S, P)$ et le coefficient de corrélation linéaire $r(S, P)$. S et P sont-elles corrélées ?

33. (eslca 90) y est un réel différent de 0 et 1. La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	y	0	1
0	1/4	a	1/8
1	1/5	b	1/10

1°) Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes. Quelles seraient alors les lois conditionnelles de X pour les différentes valeurs de Y ?

2°) On suppose $a = 1/5$. Déterminer y tel que le coefficient de corrélation linéaire de M et Y soit égal à 0. X et Y sont-elles alors indépendantes ?

34. n boîtes sont numérotées de 1 à n . La boîte n° k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1°) Loi du couple (X, Y) .

2°) Calculer $P(X = Y)$.

3°) Loi de Y , $E(Y)$.

35. (esg 90) Un commerçant réceptionne un lot de N articles. Sur ces N articles, n d'entre eux sont défectueux. On suppose $N - n \geq 1$ et $n \geq 1$. Le commerçant contrôle les articles en les tirant au hasard un à un et sans remise.

Soit X (resp. Y) la v.a. égale au rang d'apparition du premier (resp. du deuxième) article défectueux contrôlé.

1°) On suppose $n = 1$. Déterminer la loi de X , calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

2°) On suppose $n = 2$ et $N = 6$.

a) Déterminer la loi de X .

b) Déterminer la loi de Y .

c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) . On présentera cette loi par un tableau à double entrée.

d) Calculer la covariance de (X, Y) .

3°) Pour N et n quelconques ($n \geq 2$) :

a) Déterminer la loi de X .

b) Déterminer la loi de Y .

4°) Pour N quelconque et $n = 2$, déterminer la loi du couple (X, Y) .

5°) On suppose $N = 9$ et $n = 2$. Le commerçant refuse le lot dans les cas suivants :

$$(X < 4), \text{ ou } (X \geq 4 \text{ et } Y < 7).$$

Calculer la probabilité que le commerçant refuse le lot.

- 36.** (d'après escl 92) Une urne contient $N - 2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.
- 1°) Soit X_1 le rang d'apparition de la boule blanche, X_2 le rang d'apparition de la boule rouge. Déterminer la loi de X_1 , la loi de X_2 , la loi du couple (X_1, X_2) . Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
- 2°) Soit X le rang où on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit Y le rang où on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge. Déterminer la loi de X , la loi de Y . Calculer les espérances de X et de Y .

- 37.** Soit n un entier naturel strictement positif. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , on tire deux boules au hasard avec remise. On définit les v.a. X et Y respectivement égales au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1°) Déterminer la loi du couple (X, Y) .

2°) En déduire la loi de X et la loi de Y .

3°) On définit les vecteurs-colonnes $U = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n}$. Trouver une matrice M telle que $V = MU$.

- 38.** (eme 93) Soient a, b, c trois réels positifs ou nuls, de somme égale à 1. Soient X et Y deux v.a. définies sur un espace probabilisé, dont la loi du couple est donnée par :

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$a/4$	$b/2$	c
1	$a/2$	$b/2$	0
2	$a/4$	0	0

1°) Déterminer les lois (marginales) de X et de Y .

2°) Exemples : dresser le tableau de la loi conjointe du couple (X, Y) et des lois marginales, reconnaître la loi de Y , calculer la covariance et étudier l'indépendance des v.a. X et Y lorsque

a) X est la v.a. certaine égale à 2.

b) X suit la loi binomiale de paramètres 2 et $1/2$.

3°) Calculer les réels a, b, c pour que X et Y aient la même loi. Vérifier que cette loi est binomiale et déterminer ses paramètres.

4°) On suppose dans cette question que X suit la loi binomiale de paramètres 2 et p (avec $0 < p < 1$). Démontrer qu'alors Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

- 39.** (large extrait de essec math 2 2001) Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

Partie I. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$, ou encore $E(XY) - E(X)E(Y)$.

1°) Covariance des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $V(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.

A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et $Y = X^2$.

Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y . Etudier alors la réciproque de la question 2° b).

Partie II 1°) Calculs préliminaires

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geq q$. En raisonnant par récurrence sur n , établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^n C_k^q = C_{n+1}^{q+1}$$

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \quad ; \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad ; \quad \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .

On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- * N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
- * N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- * X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- * Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y .

2°) Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2 .

a) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $P(N_2 = j / N_1 = i)$ pour $1 \leq j \leq n, j \neq i$. En déduire $P(N_2 = j)$ pour $1 \leq j \leq n$, puis comparer les lois de N_1 et N_2 .

b) Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.

c) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i \cap N_2 = j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ en distinguant les deux cas $i = j$ et $i \neq j$ et en déduire que :

$$E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2 .

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1 + N_2)$.

3°) Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

a) Montrer que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ sont égales à $\frac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Que valent-elles sinon ?

b) En déduire les probabilités $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$ et $P(X = i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

(On vérifiera que les formules donnant $P(Y = j)$ et $P(X = i)$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).

c) Déterminer les probabilités $P(X = i / Y = j)$ et $P(Y = j / X = i)$ pour $1 \leq i < j \leq n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y = j$ et la loi de Y conditionnée par $X = i$.

d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y , autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leq j \leq n$.

En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

4°) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n .

b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2))]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n .

5°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Vérifier que $X + Y = N_1 + N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X + Y$ et la covariance de X et Y .

b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y .

On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n .

Annales em Lyon (ex e.s.c.l.)

- **escl 88** Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q , avec $q = 1 - p$.
 1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
 2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
 - b) Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$. Montrer que $p_1 = n p q^{2n-2} (1+q)$.
 - c) Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y=h) / (X=k)$, pour k appartenant à $\{0, 1, \dots, n\}$ et h à $\{0, 1, \dots, n-k\}$.
 - d) Démontrer $P(Z=s) = \sum_{k=0}^s P(X=k) \cap (Y=s-k)$.
 - e) Calculer $p_s = P(Z = s)$, et montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(1+q)$. (On pourra vérifier : $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = C_n^s C_s^k$.)

- **escl 90**
 1. On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour x dans $] -1, 1[$ et que sa somme $S(x)$ est égale à $\frac{1}{1-x}$. On rappelle également que la fonction S ainsi définie sur $] -1, 1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier naturel k , sa dérivée k -ième $S^{(k)}$ est définie sur $] -1, 1[$ par :

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$
 Démontrer que, pour tout réel x dans $] -1, 1[$ et tout entier naturel k :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$
 2. Soit p un réel tel que $0 < p < \frac{2}{3}$. Dans un pays, la probabilité qu'une famille ait exactement n enfants est $\frac{1}{2} p^n$, **quand $n \geq 1$** . Par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est $1/2$.
 - a) Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
 - b) Soit n un entier tel que $n \geq 1$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. On considère une famille de n enfants : calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
 - c) Soit k un entier ≥ 1 . Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
 - d) Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

- **escl 91** Une urne contient des jetons numérotés de 1 à p ($p \geq 2$). On effectue N tirages successifs ($N \geq 1$). Chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne. Pour tout entier i compris entre 1 et p , on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit : F_i est le nombre de fois où le jeton $n^\circ i$ a été tiré. X_i prend la valeur 0 si le jeton $n^\circ i$ n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si il a été tiré au moins une fois.
 1. Etude des variables aléatoires F_i .
 - a) Pour tout i compris entre 1 et p , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i .
 - b) On considère la variable aléatoire $F = \sum_{i=1}^p F_i$. Que vaut F ? Calculer l'espérance et la variance de F .
 - c) Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes ?
 2. Etude des variables aléatoires X_i .
 - a) Pour tout i compris entre 1 et p , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i .

b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et p . Déterminer la probabilité pour que $X_i = 0$ sachant que $X_j = 0$. Est-ce que les variables X_i et X_j sont indépendantes ?

c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^p X_i$

3. Application.

Vous êtes responsable du service après-vente d'une chaîne de magasins. Ce service est présent sur quinze sites et, au total, il reçoit en moyenne cinquante appels par jour.

a) En utilisant le début de l'exercice pour modéliser cette situation, donner une interprétation des variables aléatoires F_i , X_i et X .

b) Calculer des valeurs approchées à 10^{-1} près de l'espérance de F_i , de l'espérance de X_i et de l'espérance de X . Commenter brièvement ces résultats.

• **escl 92** Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} .$$

2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N-2$ boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement les N boules sans remettre les boules tirées dans l'urne.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

a) Soient i et j deux entiers compris entre 1 et N . Calculer la probabilité $p_{i,j}$ pour que $X_1 = i$ et $X_2 = j$. (On distinguera le cas $i = j$ et le cas $i \neq j$.)

b) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 . Est-ce que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ? Calculer les espérances des variables aléatoires X_1 et X_2 .

c) On note X la variable aléatoire égale au rang du tirage où on obtient soit la boule blanche, soit la boule verte. On note Y la variable aléatoire égale au rang du tirage à partir duquel on a obtenu la boule blanche et la boule verte.

Remarque : en fait, $X = \inf(X_1, X_2)$ et $Y = \sup(X_1, X_2)$. Par exemple, si on a tiré rouge, rouge, verte, rouge, blanche, alors :

$$X_1 = 5 \quad X = 3$$

$$X_2 = 3 \quad Y = 5 .$$

Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y .

Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y .

• **escl 93** Question préliminaire. Soit k et n des entiers naturels tels que $0 < 3k \leq n$

a) Démontrer que, pour tout i tel que $0 \leq i \leq k-1$, $C_n^i \leq \frac{1}{2} C_n^{i+1}$,

puis que, pour tout i tel que $0 \leq i \leq k$, $C_n^i \leq \frac{1}{2^{k-i}} C_n^k$

b) En déduire que $C_n^k \leq \sum_{i=0}^k C_n^i \leq 2C_n^k$.

Monsieur X vend des journaux, sur le marché, le samedi matin. Il propose au choix deux quotidiens A et B , et il dispose d'un stock de 40 exemplaires pour A et 40 exemplaires pour B .

On suppose :

-- qu'aucun client ne demande A et B ,

-- que si un client demande A (respectivement B) alors que le stock de A (respectivement B) est épuisé, il part sans demander B (respectivement A),

-- que les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent dans la matinée. Chaque client demande soit A , soit B avec la même probabilité 0,5.

1. Y est la variable aléatoire égale au nombre de clients qui demande A cette matinée. Déterminer la loi de Y . Donner son espérance et sa variance.

2. On note x la probabilité de l'événement : Monsieur X ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée.

a) Exprimer x à l'aide de la loi de Y.

b) Dédurre de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x .

c) Dédurre de la question préliminaire un encadrement de x .

d) Comparer, en utilisant éventuellement des valeurs numériques approchées données en annexe, les résultats des questions b et c.

Annexe : $C_{60}^{20} = 4,192 \cdot 10^{15}$; $C_{60}^{19} = 2,045 \cdot 10^{15}$; $C_{60}^{18} = 9,250 \cdot 10^{14}$.

• **escl 94** On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.

La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0,1.

On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés ;

X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés ; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc : $X + Y = N$.

1. Soit n un entier naturel ; calculer, pour tout entier naturel k , la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$.

2. Donner la loi du couple (X, N) , puis montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,5.

3. Déterminer la loi de Y .

4. a) Si i et j sont deux entiers naturels, calculer la probabilité : $P((X=i) \cap (Y=j))$.

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

• **escl 95** Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu.

On suppose $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in \mathbf{N}^*$, $p \leq \frac{n}{3}$.

Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, p numéros différents. Le meneur dévoile alors p numéros perdants parmi les $n - p$ numéros qui n'ont pas été tirés.

Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.

Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.

Stratégie B : il échange les p numéros qu'il a tirés contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement, parmi les $n - 2p$ numéros qui n'ont été ni tirés, ni dévoilés durant la première phase.

Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

1. Etude directe d'un cas simple. On suppose ici : $n = 3$, $p = 1$. Calculer la probabilité d'obtenir le numéro gagnant avec la stratégie A, puis avec la stratégie B.

2. Etude du cas général.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le i -ème numéro tiré dans la première phase est gagnant, 0 sinon.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.

Ainsi, $X = X_1 + X_2 + \dots + X_p$

a. Démontrer que, pour $1 \leq i \leq p$: $P(X_i = 1) = \frac{p}{n}$. En déduire $E(X) = \frac{p^2}{n}$.

b. Déterminer la loi de X . En déduire les formules

$$(1) \sum_{k=0}^p C_p^k C_{n-p}^{p-k} = C_n^p \quad ; \quad (2) \sum_{k=0}^p k C_p^k C_{n-p}^{p-k} = \frac{p^2}{n} C_n^p$$

On suppose désormais, dans toute la suite de l'exercice, que le joueur utilise la stratégie B.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le i -ème numéro tiré dans la deuxième phase est gagnant, 0 sinon.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.

c. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq p$ et pour $1 \leq i \leq p$, calculer la probabilité conditionnelle $P(Z_i = 1 / X = k)$.

d. Pour $1 \leq i \leq p$ démontrer que :

$$P(Z_i = 1) = \frac{1}{(n-2p)C_n^p} \sum_{k=0}^p (p-k)C_p^k C_{n-p}^{p-k}$$

e. En utilisant les formules démontrées en b., vérifier que :

$$E(Z) = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}.$$

Des stratégies A et B, laquelle est préférable ?

- **escl 97** On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de «pile» soit égale à $p \in]0, 1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.

On effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de "6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,

X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,

Y indique le nombre de "faces" obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, Si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1°) Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance.

2°) Pour $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / Z = n)$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.

3°) Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\text{si } 0 \leq k \leq n \leq N \text{ alors } P(X = k \text{ et } Z = n) = C_n^k C_N^n p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n,$$

$$\text{si } n > N \text{ ou } k > n \text{ alors } P(X = k \text{ et } Z = n) = 0.$$

4°) Calculer la probabilité $P(X = 0)$.

5°) Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$: $C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}$.

En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6°) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7°) Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ? Déterminer la loi du couple (X, Y) .

8°) En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y) .

- **escl 98** Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1°) On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a. Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

b. Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbf{N}^*)^2$ de la façon suivante :

pour tout $(i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement :

"les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)$ ième est blanche

ou

"les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)$ ième est verte".

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\dots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2°) a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

b. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

c. Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$ et calculer cette valeur minimale.

3°) Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbf{N}^*)^2$: $P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$.

4°) a. En déduire la loi de la variable aléatoire Y .

b. Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5°) a. Etablir que, si $p \neq 1/2$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. (On pourra considérer $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$.)

b. Démontrer que, Si $p = 1/2$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- **escl 98 bis** (sujet de secours) Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une verte. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention de la première boule verte. On définit trois variables aléatoires de la manière suivante :

X prend la valeur k si la première boule verte est obtenue au k -ième tirage,

Y prend la valeur n si on a obtenu n boules blanches avant l'apparition de la première boule verte,

Z prend la valeur ℓ si on a obtenu ℓ boules noires avant l'apparition de la première boule verte.

Ainsi : $X = Y + Z + 1$.

1. a. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

b. Calculer son espérance et sa variance.

2. Pour tout triplet (k, n, ℓ) de \mathbf{N}^3 , montrer :

$$\text{si } k \neq n + \ell + 1, \text{ alors } P(X = k \text{ et } Y = n \text{ et } Z = \ell) = 0$$

$$\text{si } k = n + \ell + 1, \text{ alors } P(X = k \text{ et } Y = n \text{ et } Z = \ell) = C_{k-1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

En déduire la loi du couple (X, Y) .

3. On admettra que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x tel que $0 < |x| < 1$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} C_k^n x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}.$$

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

b. Vérifier que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.

c. En déduire l'espérance et la variance de Y .

4. Est-ce que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes ?

5. Déterminer la loi du couple (Y, Z) .

6. En comparant la variance de X avec celle de $Y + Z$, déterminer la covariance du couple (Y, Z) .

- **escl 99** La lettre c désigne un entier naturel non nul fixé. Une urne contient initialement des boules blanches et de boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, où b et r sont des entiers naturels non nuls.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

c. Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

2. Pour tous entiers naturels non nuls n, x, y , on note $u_n(x, y)$ la probabilité d'obtenir d'obtenir une boule blanche au n -ième tirage, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

a. Montrer, en utilisant un système complet d'événements associé au premier tirage, que, pour tous entiers naturels non nuls x, y, z , on a : $u_{n+1}(x, y) = u_n(x + c, y) \frac{x}{x + y} + u_n(x, y + c) \frac{y}{x + y}$.

b. En déduire, par récurrence, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x, y , on a :

$$u_n(x, y) = \frac{x}{x + y}.$$

3. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement exactement une boule blanche et une boule rouge et que $c = 1$. Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

a. Déterminer la loi de X_1 .

b. Déterminer la loi de X_2 .

c. Montrer, par récurrence, que X_n suit une loi uniforme dont on donnera l'espérance et la variance.

• **escl 2000** Soit a un entier strictement positif.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, P(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$.

2. Montrer : $E(X) = \frac{2n+1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.

3. Montrer : $E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$)

Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

• **escl 2002** (extrait ; voir chapitre VII)

L'énoncé demandait d'établir, en préliminaire (étant admis que la série est convergente) :

$$\text{Pour tout } x \in]0, 1[, \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}, s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Voir l'énoncé du préliminaire chap IV et l'énoncé complet chap VIII.

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

* On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).

On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

* Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n , on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N . Donner son espérance.

b) Soient $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / N = n)$.

c) Vérifier : $P(X = 0) = 4/9$.

d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

f) Montrer :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, P(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

Annales e.s.c.

• **esc 97** On dispose de deux urnes U_1 et U_2 , de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6.

On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1°) Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?

2°) Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.

3°) a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 .

b) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2) .

4°) a) Montrer que pour tout entier n de \mathbf{N}^* , on a :

$$* P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6} P(X_n = 1).$$

$$* \text{ Pour tout entier } k, 1 \leq k \leq 5, P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} P(X_n = k+1).$$

$$* P(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6} P(X_n = 5).$$

b) En déduire que, pour tout entier n de \mathbf{N}^* : $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + 1$.

c) Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

- **esc 2000** On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire ainsi que d'une pièce non truquée. On considère l'expérience E suivante :

- * on jette une fois la pièce

- * si l'on obtient pile, on tire avec remise une boule de l'urne

- * si l'on obtient face, on tire sans remise une boule de l'urne.

1. On répète deux fois E. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

- (a) Donner les valeurs de X.

- (b) Définir l'événement $(X = 2)$, en déduire $P[X = 2] = \frac{1}{8}$ et donner $P[X = 0]$.

- (c) Calculer l'espérance et la variance de X.

2. On répète E et on s'arrête dès que l'urne est vide ou dès que l'on a effectué E trois fois.

Soient Y la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de E effectuées et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

- (a) Calculer $P[Y = 2]$. En déduire la loi de Y.

- (b) Montrer que $P[Y = 3 \cap Z = 1] = \frac{11}{32}$. Déterminer la loi du couple (Y, Z).

- (c) Calculer la covariance de ce couple.

3. On répète E jusqu'à ce que l'on obtienne la première boule blanche.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de réalisations de E ainsi effectuées.

- (a) Quel est l'ensemble des valeurs de T ?

- (b) Calculer $P[T = 1]$ et $P[T = 2]$.

- (c) Soit n un entier. Calculer pour $n \geq 3$ la probabilité de l'événement E_{n-2} : " les n - 2 premières réalisations de E donnent chacune pile et une boule noire".

En déduire que : pour $n \geq 2$, $P[T = n] = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

- (d) Calculer l'espérance de T.

- **esc 2002**, extrait ; voir chap VIII. Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que :

X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n, x)$) avec $x \in]0, 1[$.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n, y)$) avec $y \in]0, 1[$.

On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité : $Z = 2n - X - Y$.

1°) a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs possibles de Z.

b) Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités :

$P(Z = 0)$; $P(Z = 2n)$; $P(Z = 2n - 1)$; $P(Z = 1)$.

2°) a) Donner les espérances et variances suivantes :

$E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et en déduire $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.

b) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.

Montrer que l'espérance de W est donnée par : $E(W) = n^2(n - 1)xy(2 - x - y)$.

Annales edhec

- **edhec 95** Une urne contient 8 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes. Un joueur effectue dans cette urne des tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée avant de tirer la suivante, jusqu'à ce qu'il obtienne:

Soit une boule rouge, auquel cas il a gagné et le jeu s'arrête.

Soit une boule verte, auquel cas il a perdu et le jeu s'arrête également.

On désigne par n un entier naturel non nul.

On note A_n l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur à l'issue du n -ième tirage"

1°) a) Calculer $P(A_n)$.

b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

2°) Quelle est la probabilité que le joueur perde ?

3°) Quelle est la probabilité que ce jeu ne s'arrête jamais ?

4°) On note X la variable aléatoire égale au nombre minimal de tirages nécessaires à l'arrêt du jeu (sic !). Reconnaître la loi de X et donner son espérance.

Le joueur paye un franc le droit d'effectuer un tirage, il gagne a francs en cas de victoire, et paye 33 francs en cas de défaite.

On note Y la variable aléatoire qui vaut a en cas de victoire et -33 en cas de défaite. On appelle G le gain (positif ou négatif) du joueur à la fin du jeu.

5°) a) Exprimer G en fonction de X et de Y .

5°) b) Calculer $E(G)$ et en déduire la valeur de a pour laquelle ce jeu est équitable.

- **edhec 97** (problème, partie I ; voir chap VIII) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n . Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1°) On note $N(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre N . Montrer que $N(\Omega) = \{2, n+1\}$.

2°) Montrer que : $\forall k \in \{1, n\}, P(N > k) = \frac{A_n^k}{n^k}$. Rappel : A_n^k désigne le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments.

3°) a) Montrer que : $\forall k \in \{2, n\}, P(N = k) = P(N > k-1) - P(N > k)$.

b) Calculer $P(N = n+1)$ puis en déduire la loi de N .

4°) Montrer que l'espérance $E(N)$ de la variable aléatoire N est : $E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}$.

- **edhec 98** On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec la probabilité $1/2$. On note P_k (resp F_k) l'événement : on obtient pile (resp face) au k -ième lancer. Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

1°) Calculer $P(X = 2)$.

2°) a) en remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.

b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.

c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

d) Calculer $P(X = 0)$.

3°) On se propose dans cette question de retrouver le résultat de la question 2°)c) par une autre méthode.

a.) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.

b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que :

$$\forall k \geq 3 \quad P(X = k) = \frac{1}{2} P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}.$$

c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geq 2}$ est arithmétique. Retrouver ainsi le résultat annoncé.

4°) Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

• **edhec 99** Soient X, Y, Z trois variables mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P) . On suppose que X, Y, Z suivent toutes les trois la loi $U_{[[1, n]]}$ (c'est à dire que :

$$\forall k \in [[1, n]] \quad P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = \frac{1}{n}.$$

1) a. Montrer que : $\forall k \in [[2, n + 1]], P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}$.

b. Montrer que : $\forall k \in [[n + 2, 2n]], P(X + Y = k) = \frac{2n - k + 1}{n^2}$.

2) Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :

$$P(X + Y + Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$

3) a. Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $U_{[[1, n]]}$.

b. Pourquoi T est-elle indépendante de Y ?

c. En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X + Y + Z = n + 1)$.

• **edhec 2000**, problème. On lance indéfiniment une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on dit que le k -ème lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)$ -ème lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : « on obtient "Pile" (resp. "Face") au k -ème lancer ». Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, $P_1 F_2$ à la place de $P_1 \cap F_2$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie 1 : étude de quelques exemples.

1) Donner la loi de X_2 .

2) a. Donner la loi de X_3 .

b. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

3) a. Trouver la loi de X_4 .

b. Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n .

2) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que

$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p} (q^{n-1} - p^{n-1}).$$

3) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n - 1)$ en fonction de p et q .

4) Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4 .

5) Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k -ème lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernoulli). Ecrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.

Partie 3 : étude du cas $p = q$.

1) Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binomiale.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

- **edhec 2001**, extrait ; voir chap VIII)) On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1, P_2 et P_3 . On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_i < 1$.
On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.
On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.
 - 1) a. Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.
b. Donner la loi de X_i , pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.
c. En déduire l'espérance de X , notée $E(X)$.
- **edhec 2002** On désigne par n un entier naturel non nul.
On lance n fois une pièce de monnaie donnant "pile" avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k -chaîne de "pile" une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "pile", cette suite devant être suivie d'un "face" ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout k de $[[1, n]]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k -chaînes de "pile" obtenues au cours de ces n lancers.
Pour tout k de $[[1, n]]$ on pourra noter P_k l'événement « on obtient "pile" au $k^{\text{ème}}$ lancer ». Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$ alors $Y_1 = 2, Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[[1, n]]$ l'espérance de Y_k , notée $E(Y_k)$.
 - 1) Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
 - 2) Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.
 - 3) Dans cette question, k désigne un entier de $[[1, n - 2]]$.
Pour tout i de $[[1, n]]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k -chaîne de "pile" commence au $i^{\text{ème}}$ lancer et qui vaut 0 sinon.
 - a. Calculer $P(X_{i,k} = 1)$.
 - b. Soit $i \in [[2, n - k]]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.
 - c. Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = q p^k$.
 - d. Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Annales Ecricome

- **ecricome 93** La société ALTUIS étudie à la fin de chaque mois le coût mensuel de gestion de l'article A, lié au nombre n de centaines d'articles A en stock au début du mois (le stock est dit de niveau $100n$) et au nombre k de centaines d'articles A demandés pendant ce même mois.
La demande mensuelle de cet article A est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre 5 (en centaines d'articles).
La société estime qu'un article A restant en stock à la fin du mois coûte à l'entreprise 300 francs alors qu'un article A manquant lui coûte 500 francs.
 - 1°) Pour tout entier naturel n on pose $p_n = P(X \leq n)$.
 - a) Exprimer, pour n non nul, p_n et $\sum_{k=0}^n k.P(X = k)$ en fonction de p_{n-1} et de n .
 - b) En utilisant les probabilités p_n , calculer les sommes u_n et v_n suivantes :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k.P(X = k)$$
 - c) Calculer u_4 et v_4 à 10^{-6} près au mieux (on utilisera la table jointe).
 - 2°) Montrer que, pour un stock de niveau $100n$ et pour une demande mensuelle de $X=k$ centaines d'articles A, le coût $C_n(k)$ de gestion de l'article A s'écrit :

$$C_n(k) = \begin{cases} 3 \cdot 10^4 \cdot (n - k) & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 5 \cdot 10^4 \cdot (k - n) & \text{si } n < k \end{cases}$$

3°) On note C_n la variable aléatoire prenant les valeurs $C_n(k)$. Calculer en fonction de n , de p_{n-1} et de p_n l'espérance mathématique :

$$E(C_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_n(k) \cdot P(X = k)$$

4°) Démontrer la relation : $E(C_{n+1}) - E(C_n) = (8p_n - 5) \cdot 10^4$.

5°) Trouver la valeur de l'entier naturel n solution arrondie par excès de l'équation : $E(C_{n+1}) = E(C_n)$

6°) En déduire le sens de variation de la suite de terme général $E(C_n)$. Montrer que $E(C_5) > E(C_6)$. Conclure quant à l'existence d'un niveau $100n$ du stock d'articles A qui minimise l'espérance $E(C_n)$ du coût de gestion de cet article.

Table donnant certaines valeurs de des probabilités $P(X = n)$ et $p_n = P(X \leq n)$ si X suit une loi de Poisson de paramètre 5 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=n)$	0,006737	0,0336897	0,0842243	0,1403739	0,1754674	0,1754674	0,1462228	0,1044449
p_n	0,006737	0,0404277	0,1246520	0,2650259	0,4404933	0,6159607	0,7621835	0,8666283

● **exercice 94 Première partie.** Pour $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ fixé on considère la fonction f définie pour $x \in \mathbf{R}^* \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

1°) Donner une expression plus simple de $f(x)$.

2°) En déduire une autre écriture de : $\sum_{k=1}^n k \cdot x^k$. On admettra que :

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2} = \frac{n(-n+1)x^{n+1} + 2(n+1)(n-1)x^n - n(n+1)x^{n-1} + 2}{(1-x)^3}.$$

3°) Démontrer alors que :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) 2^n + 1 \quad ; \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n k(k-1) 2^{k-2} = (n^2 - 3n + 4) 2^{n-1} - 2.$$

4°) En déduire que l'on a : $\sum_{k=1}^n k 2^k = (n^2 - 2n + 3) 2^{n+1} - 6$.

5°) Préciser les expressions de $\sum_{k=1}^{n-1} k 2^{k-1}$ et de : $\sum_{k=1}^{n-1} k 2^k$.

Deuxième partie. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On met dans une urne U :

2^0 boules numérotées 0

2^1 boules numérotées 1

2^2 boules numérotées 2

2^3 boules numérotées 3

.....

2^n boules numérotées n

1°) On extrait une boule de l'urne, toutes les boules ayant la même probabilité d'être tirées, et l'on note X_1 la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le numéro de la boule tirée.

a) Déterminer la loi de probabilité de X_1 .

b) Calculer l'espérance mathématique de X_1 .

c) Quelle est l'espérance mathématique de $(X_1)^2$?

d) En déduire la variance de X_1 .

2°) On définit maintenant une variable aléatoire réelle X_2 de la façon suivante :

si $X_1 = 0$ on convient de poser $X_2 = 0$;

si $X_1 = i$, avec $1 \leq i \leq n$, on enlève de l'urne toutes les boules de numéro supérieur ou égal à i . On effectue alors un tirage d'une boule dans l'urne, toutes les boules y restant ayant même probabilité d'être tirées, et X_2 prend alors pour valeur le numéro de la boule tirée.

a) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) .

b) En déduire la loi de probabilité de X_2 .

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n-1} P(X_2 = k) = 1$.

d) Calculer l'espérance mathématique de X_2 .

• **ericome 98 et ericome 2000** : voir chapitre VIII

• **ericome 2002** Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

1. Etude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$Y = k$ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage.

$Y = 0$ si les n boules tirées sont noires.

1. Déterminer la loi de X . Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

3. Vérifier que : $\sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1$.

4. Pour $x \neq 1$ et n entier non nul, montrer que $\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$

5. En déduire $E(Y)$.

2. Etude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage.

$X_i = 0$ sinon.

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par : $Z_p = \sum_{i=1}^p X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?

2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1 .

3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.

4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2 .

5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p .

6. Soit $p \leq n - 1$.

a. Déterminer $P(X_{p+1} = 1 / Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que : $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.

c. En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$. (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, \dots, X_p étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et on calculera $E(Z_p)$.)

- **ericome 2003**, extrait ; voir chap VII et VIII. Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produits 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité qu'un objet construit par B soit défectueux est 0.2.
 1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A".
 2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par la chaîne A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.
 - a. Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.
 - b. Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $p(X=k/Y=n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).
 - c. En déduire en utilisant le système complet d'événements $(Y=i)_{i \in \mathbb{N}}$ que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Annales isc-eslsca

- **eslsca 93** On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des prélèvements successifs, au hasard, d'une boule de cette urne selon le protocole suivant : Après *chaque* tirage, la boule obtenue est remise dans l'urne, et on ajoute *de plus* n boules de la couleur de la boule qui vient d'être obtenue, *avant* le tirage suivant. (n est un entier naturel qui sera précisé dans les questions suivantes).
 - 1°) Dans cette question n vaut 0. Soit k un entier strictement positif, quelle est la loi du nombre de boules blanches obtenues au cours des k premiers tirages ? Préciser son espérance et sa variance.
 - 2°) Dans cette question on prend n = 1. Quelle est la loi du nombre aléatoire de boules blanches obtenues au cours des deux premiers tirages ? des trois premiers tirages ? peut-on généraliser les résultats obtenus ?
 - 3°) Dans cette question n est choisi au début des tirages et au hasard parmi les trois nombres 0, 1 et 2. On effectue alors deux tirages et on obtient les deux fois une boule blanche. quelle est la probabilité d'avoir choisi n = 0 ? n = 1 ? n = 2 ?
- **eslsca 94** Une machine à sous est constituée de 4 roues mobiles. Chacune est partagée en p secteurs identiques dont un seul porte l'inscription "gagné". La rotation de chaque roue amène au hasard l'un quelconque de ses secteurs dans la "fenêtre" de la machine. Pour une mise de 1 Franc On a le droit d'immobiliser les roues de son choix et de faire tourner les autres.
Pour gagner à ce jeu il faut amener tous les secteurs gagnants dans la fenêtre de la machine et au départ aucun secteur gagnant n'est visible.
 - 1°) Lors d'un premier essai, on fait donc tourner les quatre roues. Soit X_1 le nombre de secteurs gagnants obtenus. Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est la probabilité de gagner à ce premier essai ?
 - 2°) On suppose que ce premier essai n'est pas concluant et on procède donc à un deuxième essai, en bloquant les roues ayant éventuellement amené le bon secteur.
 - a) Sachant que l'événement « $X_1 = k$ », avec $0 \leq k \leq 3$, est réalisé, quelle est la probabilité de gagner à ce deuxième essai ?
 - b) A l'aide de la formule des probabilités totales en déduire la probabilité de gagner en exactement deux essais.
 - 3°) On note Y le nombre aléatoire d'essais effectués pour gagner à ce jeu (dès qu'une roue quelconque amène le secteur "gagné" elle est évidemment bloquée pour les essais ultérieurs et au départ aucun secteur gagnant n'est visible).
 - a) Déterminer la probabilité pour qu'une roue donnée n'amène jamais le secteur gagnant cours de k essais consécutifs. En déduire la probabilité pour qu'une roue donnée amène le secteur gagnant en au plus k essais.
 - b) En déduire la probabilité de gagner en au maximum n essais ($n \in \mathbb{N}^*$), puis déterminer la loi de Y.
 - c) On suppose p = 10. Quel devrait être le montant du gain pour que le jeu soit équitable ?
- **eslsca95** (les données de cet exercice sont évidemment fictives)
Pour fabriquer des piles, une usine dispose de deux machines, la machine A réalisant les 3/4 de la production et la machine B le reste. La probabilité qu'une pile sortant de la machine A (respectivement B) soit défectueuse est de 0,1 (respectivement 0,2), les défauts n'étant dus qu'au hasard. Chaque machine conditionne les piles qu'elle fabrique par boîtes de n piles (où n est un entier tel que $n > 2$). Toutes les boîtes sont ensuite entreposées ensemble. On prend au hasard une boîte dans l'entrepôt. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles défectueuses de cette boîte.
 - 1°) Lorsque n = 2, déterminer la loi de X. Calculer l'espérance de X et tracer la courbe de la fonction de répartition de X.
 - 2°) Lorsque n = 3, déterminer la loi de X et préciser son espérance.
 - 3°) La boîte choisie ne contenant aucune pile défectueuse, déterminer, dans le cas général, la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A.
 - 4°) Dans cette question, n = 2. On suppose que le poids en grammes d'une pile quelconque est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart type 1, les poids des piles étant indépendants d'une pile à l'autre. Avant l'expédition, on

pèse chaque boîte et toute boîte dont le poids des piles dépasse 21 grammes est rejetée. On prend une boîte au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit rejetée ?

N.B. Φ désignant la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, on donne les résultats suivants, extraits des tables usuelles :

$$\Phi(0,5) \approx 0,69 ; \Phi(0,7) \approx 0,76 ; \Phi(1) \approx 0,84 \quad (\approx \text{ signifiant : peu différent de.})$$

- **eslsca 96** Un restaurant propose 3 menus différents M_1, M_2, M_3 et on suppose que chaque client choisit *au hasard* l'un quelconque des trois menus, les choix des différents clients étant indépendants les uns des autres. Un jour donné, n clients se présentent et on note X_1 (respectivement X_2, X_3) le nombre aléatoire de clients choisissant le menu M_1 (respectivement M_2, M_3).

1°) Quelle est la loi de X_1 (respectivement X_2, X_3) ? Déterminer son espérance et sa variance.

2°) Quelle est la loi de la variable aléatoire $n - X_3$?

3°) a) Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire la loi de $X_1 + X_2$ et sa variance.

b) Déterminer la covariance du couple (X_1, X_2) .

4°) Quelle est la probabilité que tous les clients choisissent le même menu ? Quelle est la probabilité que le restaurateur soit obligé de préparer au moins une fois chacun des trois menus ?

- **eslsca 97** Une urne contient une proportion p de boules blanches et la proportion $q = 1 - p$ de boules noires, avec $0 < p < 1$. On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à un tirage quelconque avant le tirage suivant, jusqu'à obtenir **deux fois de suite** la même couleur et on cesse alors les tirages. On note X le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule blanche aux deux premiers tirages ? d'obtenir deux fois une boule noire aux deux premiers tirages ? En déduire la probabilité de l'événement $(X = 2)$.

2°) Calculer la probabilité de l'événement $(X = 3)$.

3°) Plus généralement, déterminer, pour tout $k \geq 2$, la probabilité de l'événement $(X = k)$ (on distinguera deux cas suivant la

parité de k). 4°) Montrer que l'on a : $\sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) = 1$. Que peut-on en conclure ?

5°) Montrer que X admet une espérance. Calculer l'espérance de X .

- **eslsca 98** On dispose de deux pièces. Pour chaque pièce, la probabilité d'obtenir « pile » à chaque lancer vaut p , et celle d'obtenir « face » vaut q , avec $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. Deux joueurs J_1 et J_2 prennent chacun une pièce et réalisent l'expérience qui consiste à lancer sa pièce jusqu'à obtenir pour la première fois « pile ». On note X_1 le nombre aléatoire de lancers effectués par J_1 et X_2 le nombre aléatoire de lancers effectués par J_2 .

1°) Quelle est la loi de X_1 ? de X_2 ? Préciser l'espérance de X_1 et X_2 .

2°) a) Pour i et j entiers naturels non nuls, calculer la probabilité de l'événement $[(X_1 = i) \text{ et } (X_2 = j)]$.

b) Pour i entier naturel non nul, calculer la probabilité de l'événement $[(X_1 = i) \text{ et } (X_2 \geq i)]$.

c) Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$, puis de l'événement $(X_1 \geq X_2)$.

d) Calculer la probabilité de l'événement $(X_1 \geq 2 X_2)$.

3°) Les joueurs J_1 et J_2 réalisent n fois l'expérience précédente, n étant un entier naturel non nul fixé. Soit Y le nombre de fois où J_1 et J_2 concluent l'expérience en même temps. Quelle est la loi de Y ? Quelle est son espérance ?

- **eslsca 99** A) On définit $S_n = \sum_{i=0}^n C_{2n}^{n+i} = C_{2n}^n + C_{2n}^{n+1} + \dots + C_{2n}^{2n}$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 .

2. Montrer que $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n}$.

3. Montrer que $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n$.

B) Pour p entier naturel non nul, on pose $u_p = \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}$.

1. Montrer que, pour tout p entier naturel non nul, $u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p$. En déduire, par récurrence, que, pour tout p entier

naturel non nul, $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

2. Déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p$.

C) On étudie le cours en bourse d'une action. On suppose les variations journalières indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le cours correspondant au jour $j = 0$, début de l'observation, et on suppose que, chaque jour, le cours monte d'une unité (+1) avec une probabilité p ($0 < p < 1$) ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n$ -ième jour suivant le début de l'observation. Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième on a : $X_4 = -1 -1 -1 + 1 = -2$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X_4 ? Plus généralement, quelles sont les valeurs prise par X_{2n} ?
2. On note Y_{2n} , respectivement Z_{2n} , le nombre de jours (pendant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, respectivement baissé. Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n} et Z_{2n} ? Donner leurs espérances .
3. Quelles relations lient, d'une part n , Y_{2n} et Z_{2n} , et d'autre part X_{2n} , Y_{2n} et Z_{2n} ? En déduire une expression de X_{2n} en fonction de Y_{2n} et n . Quelle est l'espérance de X_{2n} ? Que vaut-elle si $p = \frac{1}{2}$? Est-ce surprenant?

Montrer que : $\forall k \in [-n, n] \quad P(X_{2n} = 2k) = C_{2n}^{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$.

4. On suppose, dans cette question, que $p = \frac{1}{2}$ et on note p_n la probabilité que l'action ait monté ou soit restée stable à l'issue des $2n$ jours d'observation. Montrer que $p_n = \frac{1}{2} + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$. Que valent p_1 , p_2 , p_3 ? Que se passe-t-il quand n devient grand?